ALESSANDRO PADOA

ARITMETICA INTUITIVA

PER LE SCUOLE MEDIE

Volume Primo

2ª Edizione.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Quadrato magico

1923

REMO SANDRON — EDITORE

Libraio della Real Casa

MILANO-PALERMO-NAPOLI-GENOVA-BOLOGNA-TORINO-FIRENZE

O fanciullo d'Italia,

ho scritto questo libro per te, con animo paterno; in modo che ogni sua pagina possa dare qualche alimento al tuo pensiero, ma senza che la fatica o la noia abbiano a contristare il tuo animo giocondo.

E perciò ti invito a leggerlo con fiducia:
nulla contiene, che tu non possa comprendere;
nulla domanda, cui tu non possa rispondere;
e nulla propone, che tu non possa eseguire.

Leggendolo attentamente, per capire e rammentare, accrescerai ogni giorno il tuo sapere; e così ti avvierai a diventare utile a te, alla famiglia ed alla patria.

CAPITOLO I

I NUMERI NATURALI

§ 1. — Aritmetica senza numeri

1. — Passa un reggimento.

Ogni soldato ha il fucile in spalla ed *ogni* ufficiale ha la sciabola sguainata.

Tanti sono i fucili, *quanti* sono i soldati.

Tante sono le sciabole, *quanti* sono gli ufficiali.

2. — Nel giungere le mani, in atto di preghiera, *ogni* dito di *ciascuna* mano si appoggia ad *un* dito dell'*altra*.

Tante sono le dita di una mano, *quante* sono quelle dell'altra.

3. — Una volta entrai in un casolare d'alta montagna, per provvedermi di uova.

Vi trovai una vecchierella, rimasta sola mentre gli altri di famiglia badavano alle bestie.

Mi chiese un soldo per uovo, come usava allora.

Ma, poichè nel fare il conto si confondeva, quasi ella preferiva di non vendere, per timore di essere ingannata.

Per rassicurarla, le consegnai *un* soldo e mi feci dare *un* uovo.

Le consegnai *un altro* soldo e mi feci dare *un altro* uovo.

E così continuai, sino ad aver scambiato, con *altrettante* uova, tutte le monete da un soldo che avevo in tasca: *tante* uova, *quanti* soldi.

4. — *Quante* sono le vocali (della lingua italiana)?

Chiusa una mano,

dico *a* e stendo il pollice,
dico *e* e stendo l'indice,
dico *i* e stendo il medio,
dico *o* e stendo l'anulare,
dico *u* e stendo il mignolo.

Le vocali sono *tante*, *quante* sono le dita di una mano.

5. — Le note di una scala musicale sono:

do, re, mi, fa, sol, la, si.

Quante sono?

Provo a fare come poc'anzi con le vocali.

Ma, quando ho detto « *sol* », ho già steso il mignolo.

Per dire *quante* sono le note, le dita di una mano sono *poche*, cioè non bastano.

6. — Provo a continuare con l'altra mano:

dico « *la* » e stendo il pollice,
dico « *si* » e stendo l'indice.

Per dire *quante* sono le note, le dita delle due mani sono *troppe*, cioè ne avanzano.

7. — Invece delle dita, provo ad adoperare i (nomi dei) giorni di una settimana:

do lunedì,
re martedì
mi mercoledì,
fa giovedì,
sol venerdì,
la sabato,
si domenica.

Le note musicali sono *tante, quanti* sono i giorni di una settimana.

8. — I pianeti (principali, nell'*ordine crescente* delle loro distanze dal Sole) sono:

Mercurio, *Venere*, *Terra*, *Marte*, *Giove*, *Saturno*, *Urano* e *Nettuno*.

Quanti sono?

Anche per essi, le dita di una mano sono *poche* e le dita delle due mani sono *troppe*.

9. — Provo coi giorni:

Mercurio lunedì, *Venere* martedì, *Terra* mercoledì, *Marte* giovedì, *Giove* venerdì, *Saturno* sabato, *Urano* domenica.

E *Nettuno*?

Per dire *quanti* sono i pianeti, anche i giorni (di una settimana) sono *pochi*.

10. — Provo coi (nomi dei) mesi di un anno:

Mercurio gennaio,
Venere febbraio,
Terra marzo,
Marte aprile,
Giove maggio,

Saturno giugno,
Urano luglio,
Nettuno agosto.

Per dire *quanti* sono i pianeti, i mesi (di un anno) sono *troppi.*

11. — In mancanza di meglio, mi accontento di sapere che i pianeti sono *tanti, quanti* sono i mesi da gennaio ad agosto.

12. — Le dita di una mano sono *tante, quanti* sono i mesi da gennaio a . . .

I giorni di una settimana sono *tanti, quanti* sono i mesi da gennaio a . . .

13. — Le lettere della parola

c o m p o n i m e n t o

sono *tante, quanti* sono i mesi di un anno.

14. — Ma, per dire *quante* sono le lettere della parola

C o s t a n t i n o p o l i

anche i mesi (di un anno) sono *pochi.*

15. — Sotto alle lettere della parola *Costantinopoli,* scrivo le lettere dell'alfabeto (italiano) così:

C o s t a n t i n o p o l i
a b c d e f g h i l m n o p . . .

Le lettere della parola *Costantinopoli* sono *tante*, *quante* sono le lettere dell'alfabeto da *a* a *p*.

16. — Ma, in ogni alfabeto, ciascuna lettera ha la sua ***successiva***, fuorchè una col quale esso *termina*; e ciascuna ha la sua ***precedente***, fuorchè una col quale esso *incomincia*.

Ogni alfabeto è una ***successione finita*** di lettere, cioè con *principio* e *fine*.

17. — I libri sono *successioni finite* di pagine,
le pagine sono *successioni finite* di righe,
le righe sono *successioni finite* di parole
e le parole sono *successioni finite* di lettere.

18.— Fra le lettere del nostro alfabeto, «a» è la ***prima*** (non ha precedente) e « z » è l'***ultima*** (non ha successiva).

19. — E perciò, ad es. (esempio), per dire *quante* arance sono contenute in una cassa, anche le lettere dell'alfabeto sono *poche*.

20. — I tentativi per evitare il rinnovarsi di tali difficoltà durarono parecchi millenni e vi contribuirono molti popoli, in vario modo e con perfezionamenti successivi.

21. — Ogni difficoltà fu vinta con l'invenzione di alcuni *segni* e di una *regola*, che permettono di costruire una ***successione infinita*** di scritture diverse, cioè con *principio* e senza *fine*.

Basta sapere come la si *incomincia* e come la si possa *proseguire* sin che occorre.

22. — I *segni* e la *regola*, che noi usiamo comunemente, sono dovuti agli *indiani*.

Di tale invenzione si giovarono gli *arabi* nei loro commerci.

Da essi l'apprese **Leonardo Fibonacci**, pisano, che la diffuse in Italia col suo *Liber Abaci*, scritto nel 1202.

DOMANDA

Le dita di una mano o delle due mani servono a dire quante *sono le lettere del mio nome? del mio cognome? del nome del lettore? del suo cognome?*

E, se non servono, gli è che sono poche *o* troppe?

§ 2. — Come si scrivono i numeri

1. — La ***successione naturale*** dei ***numeri*** incomincia così:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ciascuno di questi segni si chiama ***cifra***, od anche ***numero di una cifra.***

Le parole *cifra* e ***zero*** sono d'origine araba.

2. — Essa prosegue coi ***numeri di due cifre***

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,

. . . .

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99,

che si ottengono scrivendo (ordinatamente) ciascuna *cifra*, a destra di ogni *numero di una cifra* (zero escluso).

3. — Seguono i ***numeri di tre cifre***

100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109,

. . . .

990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999,

che si ottengono scrivendo ciascuna *cifra*, a destra di ogni *numero di due cifre.*

4. — E si può continuare così, fin che si vuole.

5. — *La successione naturale dei numeri è infinita,* perchè ha *principio,* ma non ha *fine.*

6. — Brevemente, invece di *numeri della successione naturale*, dirò: ***numeri naturali*** (od anche: *numeri*).

7. — È noto come si *leggano* i *numeri naturali.*

Rammento che, se un numero ha molte cifre, ad es.

1000000

per facilitarne la *lettura*, lo si scrive

1·000·000,

inserendo *puntini* tra le *cifre*, per staccarle a tre a tre, da destra a sinistra, fin che si può.

Esercizio

Un alunno legga *dal posto ed un altro* scriva *sulla lavagna:*
23, 230, 203, 2·300, 2·030, 2·003, 23·000, 20·300, 20·030, 20·003, 230·000, 203·000, 200·300, 200·030, 200·003, 2·300·000, 2·030·000, 2·003·000, 2·000·300, 2·000·030, 2·000·003, 23·000·000.

§ 3. — Come si adoperano per contare

1. — Per *contare* le noci contenute in un sacco, ne estraggo *una* e dico (o penso) *uno*,
ne estraggo *un'altra* e dico *due*,
e così continuo sino ad aver vuotato il sacco.

2. — Così facendo, supponete ch'io abbia adoperato (ordinatamente) i numeri naturali da 1 a 457.

Dovrei dire che quelle noci sono *tante, quanti* sono i numeri naturali da 1 a 457.

Dico invece, più brevemente:

il numero di quelle noci è 457.

Più brevemente ancora:

quelle noci *sono* 457. [1]

3. — E alla domanda

« qual è *il numero di* quelle noci? »

ovvero « *quante sono* quelle noci? »

rispondo brevissimamente:

457.

4. — Quante sono le *cifre* che compongono il numero 457?

Le *conto*, come ho contato le noci:

4 uno, 5 due, 7 tre.

Sono *tre*.

457 è un *numero di tre cifre.*

5. — Quanti sono i numeri naturali da 1 a 38?

Senza contarli, rispondo che sono 38.

6. — Lo *zero* non si adopera per *contare.*

Ma anch'esso viene adoperato per rispondere alla domanda « *quanti...?* », invece della parola « *nessuno* ».

7. — Le pagine di un libro si *contano* nell'*ordine* in

---

[1] Si può dire, indifferentemente,

quei bimbi *sono* buoni

ovvero

ciascuno di quei bimbi *è* buono.

Ma non si può dire che

ciascuna di quelle noci *è* 457.

Risulta confermato che, *davanti ad un numero*, la parola «*sono*» ha un *significato speciale*. Ed infatti, tra essa ed il numero, sono *sottintese* tutte queste parole:

« tanti (o tante), quanti sono i numeri naturali da 1 a ».

cui devono esser lette e su ciascuna (tranne il frontespizio e le pagine bianche) viene scritto il *numero* col quale la si conta.

In tal modo, le pagine di un libro vengono ***numerate progressivamente.***

8. — Nelle biblioteche, i libri vengono *numerati progressivamente* nell'*ordine* in cui sono collocati in ciascuno scaffale, *ricominciando* da 1 per ogni scaffale.

9. — Le lettere di ciascuna parola vengono *numerate* nell' *ordine* in cui si scrivono e si leggono: in italiano, da *sinistra* a *destra.*

Ad es., nella parola *ROMA*, la *prima* lettera è *R*, la *seconda* è *O*, la *terza* è *M* e la *quarta* è *A*.

10. — In italiano, le parole

zero, uno, due, tre, ...

si chiamano ***numeri cardinali;*** e le parole

primo, secondo, terzo, ...

si chiamano ***numeri ordinali.***

11. — Nello stesso modo, vengono *numerate* le *cifre* di ogni *numero naturale* (che non sia di una sola cifra).

Ad es., nel numero 8·359, la *prima* cifra è 8, la *seconda* è 3, la *terza* è 5 e la *quarta* è 9.

12. — In tal modo, si *contano* e si *numerano* gli oggetti (materiali o no) di una *successione finita* (le pagine di un libro, i libri di uno scaffale, le lettere dell' alfabeto o di una parola, le cifre di un numero naturale, ecc.).

13. — Ma sovente bisogna occuparsi di ***gruppi*** di oggetti, che non formano una *successione.*

Ad es., i fiori che compongono un mazzo, le mele contenute in un cesto, gli abitanti di una città, ecc.

14. — Si dice che un *gruppo* è *finito* quando gli oggetti che lo compongono si possono *ordinare* (materialmente o col pensiero) in modo da formarne una *successione finita.*

15. — Le uova, contenute in un paniere, formano un *gruppo finito.*

Infatti, posso metterle in *fila*, formandone una *successione finita.*

16. — Dopo ciò, posso *contarle* e *numerarle*, scrivendo sul guscio di ciascuno il suo *numero progressivo.*

Ora, s'io le rimetto nel paniere, nuovamente esse formano un *gruppo non ordinato.*

Ma, se mi piacerà, con esse potrò ricostruire la *successione* di poc'anzi.

17. — Ho incominciato questo § (paragrafo), *contando* le noci contenute in un sacco, dove esse formavano un *gruppo non ordinato.*

Ma, nell'estrarle dal sacco ad una ad una, per *contarle*, le ho *ordinate*: ne ho formato una *successione.*

18. — Di mano in mano che *contavo* quelle noci, le lasciavo cadere a terra, dove si ammucchiavano: formando nuovamente un *gruppo non ordinato.*

Ma poichè, nel *contarle*, non mi ero curato di *numerarle*, non saprei ricostruire la *successione* di poc'anzi.

19. — Tuttavia, rimetto le noci nel sacco, ad una ad una, e le *riconto.*

Mentre passano per le mie mani, nuovamente esse formano una *successione.*

20. — Io non so se le *riconto* nell'*ordine* in cui le avevo *contate*.

Ma, se rammentate che per *contarle* avevo adoperato i numeri naturali da 1 a 457, voi già pensate che lo stesso mi sarà accaduto nel *ricontarle*.

21. — *Nel contare gli oggetti di un gruppo finito, se ne forma una successione.*

Nel ricontarli, può variare la loro successione, ma non il loro numero.

22. — Qual è il *primo* numero naturale? Lo *zero*.

E l'*ultimo*? Non c'è.

Perciò, alla domanda «*quanti* sono i numeri?» non si può rispondere con un *numero*.

Tuttavia, si usa rispondere: sono ***infiniti*** (come se la parola *infiniti* fosse un *numero*).

23. — Appunto perchè *i numeri naturali* formano una *successione infinita*, essi servono a dire *quanti* sono gli oggetti di qualunque *successione finita* (e di qualunque *gruppo finito*).

DOMANDE

1. — Di quante cifre sono i numeri: mille, un milione, un miliardo (cioè: mille milioni)?

2. — Quanti sono i numeri naturali da 1 a 27?

3. — Quante lettere vi sono nella parola Costantinopoli*? quanti* a*? quanti* e*? quanti* i*? quanti* o*? e quanti* u*?*

4. — Quali sono il primo e l'ultimo numero di una cifra? di due cifre? di tre cifre?

5. — Qual è il terzo giorno della settimana (a cominciare dal lunedì)? e qual è l'ultimo?

6. — Qual è il primo mese dell'anno? il quinto? l'ultimo?

§ 4. — Come si confrontano

1. — Invece di dire, ad es., che (nella successione naturale) 4 viene prima di 9,
si dice che 4 è ***minore*** di 9.

2. — Lo 0 è *minore* di ogni altro *numero naturale.*

3. — Ogni *numero di una cifra* è *minore* di ogni *numero di due cifre.*

Ogni *numero di due cifre* è *minore* di ogni *numero di tre cifre*, ecc.

4. — I due numeri 5839 e 7106 hanno *lo stesso numero di cifre.*

La *prima cifra* dell'uno è 5 e dell'altro è 7.

Poichè 5 è *minore* di 7,
anche 5839 è *minore* di 7106.

5. — I due numeri 8371 ed 8395 hanno *lo stesso numero di cifre.*

Anche la *prima cifra* è *la stessa.*

Anche la *seconda cifra* è *la stessa.*

Ma la *terza cifra* dell'uno è 7 e dell'altro è 9.

Poichè 7 è *minore* di 9,
anche 8371 è *minore* di 8395.

6. — Invece di 2 viene prima di 5,
si può dire che 5 viene dopo di 2.

Così, invece di 2 è *minore* di 5,
si può dire che 5 è ***maggiore*** di 2.

7. — ***Confrontare*** due *numeri naturali* diversi, vuol dire decidere se, nell'*ordine* in cui sono dati, il *primo* sia *minore* o *maggiore* del *secondo.*

8. — *Confrontando* il 27 prima con 20 e poi con 30, concludo che 27 è *maggiore* di 20
e che 27 è *minore* di 30.

Riassumo, dicendo che

27 è *compreso* fra 20 e 30.

9. — Nessun *numero naturale* è *compreso* fra 7 ed 8. Questi due numeri sono *consecutivi.*

Ogni *numero naturale* forma una coppia di numeri *consecutivi*, tanto col suo *successivo* quanto (se è diverso da 0) col suo *precedente.*

10. — Le vocali (italiane) sono 5.

Anche le dita (di una mano) sono 5.

Dunque: il *numero* delle vocali è lo *stesso* del *numero* delle dita.

Cioè: le vocali sono *tante, quante* sono le dita.

Od anche: le vocali e le dita sono *altrettanto numerose.*

11. — In un mazzolino di fiori, vi sono 5 garofani e 3 gardenie.

Il *numero* dei garofani è *maggiore* del *numero* delle gardenie.

Ma, comunemente, si preferisce dire che

i garofani sono *più* (*numerosi*) delle gardenie

ovvero che

le gardenie sono *meno* (*numerose*) dei garofani.

12. — I numeri

7 19 41 73

sono in *ordine crescente*, perchè ciascuno (fuorchè l'ultimo) è seguìto da numeri *maggiori.*

Il 7, che è il *primo*, è *minore* d'ogni altro, è il più piccolo.

Perciò, 7 è il *minimo* dei numeri considerati.

Il 73, che è l'*ultimo*, è *maggiore* d'ogni altro, è il più grande.

Perciò, 73 è il ***massimo*** dei numeri considerati.

13. — Il ***minimo numero naturale*** è **0.**

Il ***massimo numero di una cifra*** è **9.**

14. — I numeri

73 41 19 7

sono in ***ordine decrescente***, perchè ciascuno (fuorchè l'ultimo) è seguìto da numeri ***minori.***

In questo caso, il ***primo*** è il ***massimo*** e l'***ultimo*** è il ***minimo.***

15. — Se alcuni ***numeri naturali*** sono scritti alla rinfusa, si può sempre metterli in *ordine crescente* (cioè: nell'ordine in cui stanno nella *successione naturale*) od in *ordine decrescente* (cioè: nell'*ordine inverso* all'ordine crescente).

16. — ***Ogni gruppo finito di numeri naturali ha minimo e massimo.***

DOMANDE

1. — Qual è il successivo *di 24? di 49? di 99?*

2. — Qual è il precedente *di 1? di 500? di 1000?*

3. — Con quali numeri naturali è consecutivo *il 12? il 19? il 100?*

4. — Quali e quanti numeri naturali sono compresi *fra 5 e 9? fra 13 e 15? fra 3 e 4?*

5. — Il 403 è minore o maggiore *di 304?*

6. — I giorni di una settimana sono più *o* meno *delle dita di una mano? dei mesi di un anno?*

7. — Tra le due parole «affezionatissimo» ed «immancabilmente», quale ha più *lettere?*

8. — Fra i numeri 35, 17, 29, 12, 58, 40, qual è il minimo*? il* massimo*? Scriverli in ordine* crescente *e poi in ordine* decrescente.

9. — Quali sono il minimo *ed il* massimo *numero di due cifre? di tre cifre?*

CAPITOLO II

IL SISTEMA METRICO DECIMALE

§ 1. — Lunghezze

1. — Supponiamo di avere un pezzo di filo.

Per formarci un'idea della sua *lunghezza*, dobbiamo *tenderlo.*

Qui, e nel sèguito, suppongo che il filo sia flessibile, ma non elastico.

2. — Ma se, trascurando l'ostacolo dei monti e dei mari, tentassimo di *tendere* un filo da uno dei *poli* ad un luogo qualunque dell'*equatore*, allora la superficie terrestre lo *incurverebbe*, costringendolo a ricoprire *un quarto di meridiano* (di quel luogo).

3. — Supposto di aver fatto ciò, imaginiamo di tagliare quel filo in 10·000·000 (dieci milioni) di parti eguali.

Tendendo una di queste parti, otterremmo il *metro astronomico*, quale fu decretato dalla Convenzione francese il 7 aprile 1793.

4. — Si conserva a Parigi un regolo di platino e di iridio, costruito con l'intenzione che fosse lungo un *metro astronomico.*

Esso è ***il metro campione.***

Fu dichiarato ***metro legale*** il 10 dicembre 1799.

Lo si indica con la scrittura « m. ». ([1])

Ci si accorse poi che il *metro campione* è *un pochino più corto* del *metro astronomico.*

5. — Comunemente, si chiama *metro* ogni regolo o nastro, su un orlo del quale sia segnata la *lunghezza* del *metro campione.*

6. — ***Misurare*** la *lunghezza* di un filo col *metro,* vuol dire imaginarlo costituito da una *successione* di *tratti consecutivi,* lunghi un *metro,* e poi *contarli.*

Se contando 1, 2, 3, . . . 50 siamo giunti dall'uno all'altro *estremo* del filo, concludiamo che esso è lungo 50 m. (metri).

7. — Supponiamo invece che, dopo aver contati 50 m. di filo, ne avanzi un pezzetto.

Sul nostro metro (regolo o nastro) è segnato *il punto medio* (equidistante dagli estremi).

Se il pezzetto di filo è *più corto* del *mezzo metro,* allora lo *trascuriamo.*

E diciamo che il filo è lungo 50 m. ***abbondanti.***

8. — Se invece il pezzetto di filo è lungo *mezzo metro* o *più,* allora lo *contiamo* come se fosse *un metro.*

E diciamo che il filo è lungo 51 m. *scarsi.*

([1]) La parola greca « metron » significa *misura.*

Da ciò il nome di alcuni istrumenti: *termometro* (che *misura* la temperatura), *barometro* (che *misura* la pressione atmosferica), ecc.

9. — Quando diciamo che una *misura* è *esatta*, intendiamo dire che ci *sembra esatta*.

Ma, ad es., quando diciamo che un filo è *esattamente* 50 m., non possiamo escludere ch'esso sia 50 m. *un pochino abbondanti* o *un pochino scarsi*: ma *così poco*, da non accorgercene.

10. — Quindi, prudentemente, davanti ad ogni indicazione di *misura*, sottintenderemo la parola *circa*.

Persino il *metro*, che adoperiamo per *misurare*, è *circa* un *metro legale*.

11. — Le altezze degli edifici si misurano in *metri*, dal sommo al *livello del suolo*.

Il campanile di S. Marco, a Venezia, è alto m. 99.

12. — Le altezze delle montagne si esprimono in *metri*, dal sommo al *livello del mare*.

Il Monte Bianco, che è la più alta montagna d'Europa, è alto m. 4807.

13. — Un *decametro* (dam.) è m. 10,
un *ettometro* (hm.) è m. 100,
un *chilometro* (km.) è m. 1000. [1]

14. — Le *distanze* fra città si misurano in *chilometri* e lungo la *strada ferrata*, qualora non si dica altrimenti.

La distanza tra Bologna e Firenze è km. 133.

---

[1] Il prefisso *deca* (dieci) è greco.

I prefissi *etto* (cento) e *chilo* (mille) derivano dalle parole greche «hecaton» e «chilioi».

15. — **Un metro è** 10 ***decimetri*** (dm.)
ovvero 100 ***centimetri*** (cm.)
ovvero 1000 ***millimetri*** (mm.).

L'orlo destro della figura è un dm., decomposto in cm., mezzi cm. e mm. (1)

16. — Il campanile di Giotto, a Firenze, è alto m. 81 e cm. 75.

17. — Da misure e calcoli fatti da Bessel nel 1841, è risultato che il *metro campione* è *più corto* del *metro astronomico*, di 8 centesimi di millimetro abbondante.

Ma il Comitato internazionale dei Pesi e Misure ha deciso che il *metro campione* continui ad essere il *metro legale*.

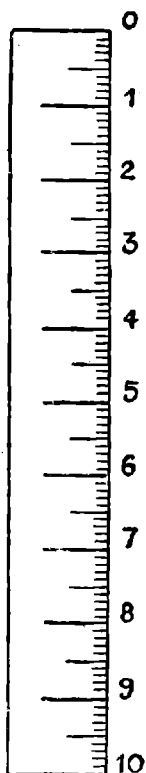
18. — Un millimetro è 1000 ***micron*** (μ). (2)

19. — Le ***indicazioni abbreviate***

m., dam., hm., km., dm., cm., mm., μ

e le altre, di cui mi occupo in questo Cap., furono stabilite dal detto Comitato.

Esse (insieme ai *numeri* che le accompagnano) costituiscono dunque un *linguaggio internazionale*, che giova conoscere e adoperare.

---

(1) I prefissi *deci* e *centi* sono latini.

Il prefisso *milli* deriva dal latino « mille », che abbiamo conservato soltanto per leggere 1000.

Dal plurale latino « milia » abbiamo tratto la terminazione *mila* (ad es., duemila).

Inoltre, poichè i Romani misuravano le *distanze* a « migliaia di passi doppi », da « milia » abbiamo tratto anche *miglio* (singolare) e *miglia* (plurale).

(2) Dal greco « micrós », *piccolo*. La lettera greca μ si legge « mi ». Le lunghezze *microscopiche* si esprimono in *micron*.

20\. — L'Inghilterra non ha ancora adottato ***il sistema metrico decimale.***

Invece del metro, gli inglesi adoperano il ***yard***, equivalente a mm. 914.

Ogni yard è 3 ***piedi*** (*feet*, al singolare *foot*).

Ogni piede è 12 ***pollici*** (*inches*).

Ogni pollice è 12 ***linee*** (*lines*).

§ 2. — Aree

1\. — Il ***metro quadrato*** è un *quadrato*, che ha i ***lati*** lunghi 1 m.

Lo si indica con la scrittura « m^2. ».

2\. — Un ***decametro quadrato***, un ***ettometro quadrato*** ed un ***chilometro quadrato*** sono quadrati, che hanno i lati lunghi 1 dam., 1 hm., 1 km.

Essi si indicano con le scritture:

dam^2., hm^2., km^2.

3\. — Il km^2. si adopera in Geografia, in cui si dice ***superficie*** anche quando si dovrebbe dire ***area.***

La superficie della Sicilia è km^2. 25·738,
della Sardegna è km^2. 24·090.

4\. — In Agrimensura, invece di

hm^2.	si dice	***ettaro***	e si	scrive	ha.,
dam^2.	»	***ara***	»	»	a.,
m^2.	»	***centiara***	»	»	ca. [1]

5\. — Il ***decimetro quadrato***, il ***centimetro quadrato*** ed il ***millimetro quadrato*** sono quadrati, che hanno i lati lunghi 1 dm., 1 cm., 1 mm.

---

[1] *Ara* dal latino « area », da cui anche *aia* ed *aiuola*.

Essi si indicano con le scritture:

dm^2., cm^2., mm^2

Eccovi, nella figura, *un centimetro quadrato.*

§ 3. — Volumi e capacità

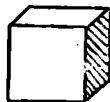
1. — Il ***metro cubo*** è un *cubo* (dado), che ha gli *spigoli* lunghi 1 m. Lo si indica con la scrittura « m^3. ».

2. — Nel misurare ***volumi*** di legna da ardere o di terra di scavo, invece di m^3., in passato si diceva ***stero*** (1) e si scriveva « s. » ; ma ora non usa più.

3. — Un ***decimetro cubo,*** un ***centimetro cubo*** ed un ***millimetro cubo*** sono cubi, che hanno gli spigoli lunghi 1 dm., 1 cm., 1 mm.

Essi si indicano con le scritture:

dm^3., cm^3., mm^3.

La figura rappresenta *un centimetro cubo.*

4. — La ***capacità*** di un *recipiente* (botte, bottiglia, bicchiere, ecc.) è il *volume* della sua *cavità.*

5. — Allorchè si misurano *capacità*, il dm^3. si chiama ***litro*** e si indica con la scrittura « l. ». Ad es., si dice: una bottiglia *da litro* (e non *da decimetro cubo*).

6. — Un ***ettolitro*** « hl. » è l. 100. (2)

Ad es., si dice: una botte *da ettolitro.*

---

(1) Dal greco « stereos », *solido.*

(2) Dal latino « libra » e dal greco « litron » (che significavano « bilancia ») sono derivati: *Libra* (costellazione), *libbra* (peso), *lira* (moneta) e *litro* (capacità).

7. — Si usa indicare il *volume* di un *liquido*, mediante la *capacità* del suo *recipiente*.

Ad es., si dice che alcuni operai hanno bevuto *due litri* (e non *due decimetri cubi*) di vino.

§ 4. — Pesi

1. — Il ***grammo*** è il ***peso*** di un cm³. di *acqua distillata* (ad una temperatura che preciserò più innanzi).

Lo si indica con la scrittura « g. ». [1]

2. — Un cm³. di acqua non distillata pesa in modo vario, a cagione delle sostanze estranee in essa disciolte.

3. — Un ***decagrammo*** (dag.) è g. 10,
un ***ettogrammo*** (hg.) è g. 100,
un ***chilogrammo*** (kg.) è g. 1000.

4. — Un ***miriagrammo*** (Mg.) è kg. 10,
un ***quintale*** (q.) è kg. 100,
una ***tonnellata*** (t.) è kg. 1000. [2]

---

[1] Dal greco « gramma » : *linea*, *lettera*, *segno* (anche quello inciso sul braccio della *stadera*).

Interviene in molte parole composte : *grammatica* (arte dello scrivere), *telegramma* (scritto che viene da lontano), ecc.

[2] *Miria* dal greco « myria » (*diecimila*), da cui anche *miriade* (numero grandissimo).

Quintale dall'arabo « quintar », la cui traduzione è « peso di cento ».

Dal latino « tina » abbiamo derivato « tino » (recipiente in cui si pigia l'uva) e poi « tinozza » (in cui si raccoglie il vino).

I francesi dicono « tonneau » (botte), « tonnelle » (pergolato) e « tonnellerie » (fabbrica di botti): da cui, in italiano, *tonnellata* (peso d' una botte) e, in inglese, « tunnel » (galleria sotterranea in forma di botte).

5\. — Comunemente, non si dice « decagrammo », ma *dieci grammi*; e si dice *etto*, *chilo* e *miria*, sottintendendo la terminazione « grammo ».

6\. — Un grammo è 10 ***decigrammi*** (dg.)
ovvero 100 ***centigrammi*** (cg.)
ovvero 1000 ***milligrammi*** (mg.).

7\. — Un carico di cotone si misura a t., di grano a q.
Per piccole provviste, il carbone si misura a Mg., il riso a kg., il burro a hg., il pepe a g.
Il farmacista deve usare anche i dg., i cg., e i mg.

§ 5. — Temperature

1\. — Le ***temperature*** si misurano coi ***termometri*** e si esprimono in *gradi*.

2\. — Il termometro *centigrado*, segna 0 quando lo si immerge nel *ghiaccio fondente* e segna 100 quando è immerso nell'*acqua bollente al livello del mare*. [1]
Perchè, se la *pressione atmosferica* è *minore* (come accade in alta montagna), l'acqua bolle *più presto*.
Ad es., in cima al Monte Bianco essa bolle a 84° (si legge « 84 gradi » e si sottintende « centigradi »).

3\. — In generale, i corpi si *dilatano* al *crescere* della temperatura e si *contraggono* al suo *diminuire*.

4\. — Al variare della *temperatura*, varia anche la *lunghezza* del *metro campione*.

---

[1] Anzi, poichè anche « al livello del mare » la pressione atmosferica è variabile, bisognerebbe soggiungere invece: *alla pressione atmosferica che fa equilibrio ad una colonna di mercurio alta cm. 76.*

Per togliere ogni incertezza, venne stabilito che il *metro legale* sia la *lunghezza* del *metro campione* a 0°.

5. — Al variare della *temperatura*, varia anche il *peso* dell'acqua contenuta in un cm³.

Per togliere ogni incertezza, il menzionato decreto 7 aprile 1793 stabiliva che il *grammo* doveva essere il *peso* di un cm³. d'acqua distillata a 0°.

6. — Però, mentre la temperatura sale sopra 0°, nell'acqua avviene una *contrazione* che raggiunge il suo *massimo* a 4°.

Poi, essa obbedisce alla legge comune di *dilatazione*.

Sicchè: il *peso* di un cm³. d'acqua è *massimo* a 4°.

Perciò venne poi stabilito che il *grammo legale* sia il *peso* di un cm³. d'acqua distillata a 4°. [1]

7. — I *termometri clinici* (che servono a misurare le temperature degli ammalati) indicano anche i *decimi* di *grado*.

Ad es., dicendo che la temperatura di un ammalato è « 38 e 5 », si vuol dire « 38 gradi e 5 decimi ».

8. — Il *sistema metrico decimale*, deliberato dalla Convenzione francese, stabilisce soltanto come si debbano misurare le *lunghezze*, le *aree*, i *volumi* ed i *pesi*.

Tuttavia, mi sono occupato anche delle *temperature*: altrimenti, non avrei potuto *precisare* che cosa sia il *metro* e che cosa sia il *grammo*.

Inoltre, mi è sembrato necessario occuparmi sùbito anche dei *valori*: perchè essi intervengono nella maggior parte delle questioni numeriche.

---

[1] E bisognerebbe soggiungere: *nel vuoto, alla latitudine 45° ed al livello del mare*.

§ 6. — Valori

1. — I *valori* delle cose si esprimono in *lire.*

2. — L'Unione monetaria internazionale riconosce soltanto le *lire* di *oro* o di *argento*, al *titolo* 900.

Ciò vuol dire, che in ogni kg. di metallo *greggio*, devono esservi 900 g. di *fino* (oro puro od argento puro).

Generalmente, gli altri 100 g. sono di rame ed hanno lo scopo di accrescere la durezza dell'oro e dell'argento, per la conservazione del *conio* (impronta).

3. — Se, adoperando un kg. di *greggio*, si coniassero 3100 *monete d'oro* ovvero 200 *monete d'argento*, ciascuna di queste sarebbe una *lira internazionale.*

4. — Ma, poichè la *lira* d'*oro* risulterebbe troppo piccola, vennero coniate soltanto monete d'*oro* da *lire*

5, 10, 20, 50, 100

coi diametri rispettivi di mm.

17, 19, 21, 28, 35.

5. — La sola moneta internazionale d'*argento* è quella da 5 *lire* (volgarmente chiamata *scudo*), col diametro di mm. 37.

6. — In Italia, furono coniate anche monete d'*argento* da 2 *lire* e da 1 *lira*, coi diametri di mm. 27 e 23.

Ma esse avevano il *titolo* 835 (anzichè 900) e perciò non erano riconosciute dall'Unione monetaria internazionale.

7. — Vi ho descritto queste monete, d'oro e d'argento, benchè da noi, ora, non siano in circolazione.

8. — Invece, adoperiamo *biglietti* (di Stato o di Banche) del valore dichiarato di lire

5, 10, 25, 50, 100, 500, 1000.

9. — Il *valore* della nostra *lira*, rispetto alla *lira internazionale*, è *variabile.*

Ma, in questo libro, la parola *lira* e l'abbreviazione «L.» si riferiscono sempre alla *lira italiana.*

10. — Ogni L. è 100 *centesimi* (cent.).

Erano in uso monete di bronzo da cent.

1, 2, 5, 10

ma quelle da cent. 1 o 2 non usano più, per la tenuità del loro *valore* rispetto al *prezzo* delle derrate.

La moneta da 5 cent. viene chiamata *soldo.* [1]

11. — Adoperiamo inoltre monete di *nichelio*, da L. 1 o 2 e da cent. 20 o 50.

12. — La moneta fondamentale inglese è la *lira sterlina* (Lst., *pound sterling*), equivalente a *lire* d'*oro* 25 (e centesimi 20 circa).

Ogni Lst. è 20 *scellini* (*shillings*).

Ogni scellino è 12 *denari* (*pence*, al singolare *penny*).

---

[1] Da «solido», pezzo di rame non coniato che preluse alle monete metalliche.

CAPITOLO III

ADDIZIONE

§ 1. - Come si indicano le quattro operazioni fondamentali

1. — Il mio giovane lettore ha imparato, nelle scuole elementari, ad *eseguire* (coi numeri naturali) le quattro ***operazioni*** fondamentali, chiamate: ***addizione***, ***sottrazione***, ***moltiplicazione*** e ***divisione***.

2. — In ciascuna di esse, bisogna distinguere i due numeri *dati* (***operando*** ed ***operatore***) dal numero che si *cerca* (***risultato***).

3. — L'*operando* e l'*operatore* si chiamano rispettivamente:

primo addendo e ***secondo addendo***,
sottraendo e ***sottrattore***,
moltiplicando e ***moltiplicatore*** (ovvero: ***primo fattore*** e *secondo* ***fattore***),
dividendo e ***divisore***.

4. — Il *risultato* si chiama rispettivamente: ***somma, differenza, prodotto*** e ***quoto***. [1]

5. — Fra l'*operando* e l'*operatore*, si scrive rispettivamente il *segno d'operazione*

	+	—	×	:
che si legge	***più***	***meno***	***per***	***diviso.***

6. — Si ottiene così una scrittura che ***indica*** (completamente) un' *operazione da eseguire.*

Ad es., le scritture

$$21 + 3, \qquad 21 - 3, \qquad 21 \times 3, \qquad 21 : 3$$

indicano che, coi numeri 21 e 3, si deve eseguire (rispettivamente) l'***addizione,*** la ***sottrazione,*** la ***moltiplicazione*** e la ***divisione.***

7. — Fra l'***operazione indicata*** ed il ***risultato*** si scrive il *segno di eguaglianza*

$$=$$

che (usato in tal modo) si legge: *fa.*

L'uso dei quattro segni d' operazione e del segno di eguaglianza risale al 1600.

8. — Ad es.,

$$21 + 3 = 24 \qquad 21 - 3 = 18$$
$$21 \times 3 = 63 \qquad 21 : 3 = 7$$

---

[1] *Somma* dal latino « Summa », perchè anticamente si scriveva *sopra* gli addendi, cioè al *sommo*.

Considerate come operazioni *fondamentali*, l'addizione ha *due soli* addendi e la moltiplicazione ha *due soli* fattori.

Comunemente, l'operando e l'operatore della sottrazione sono chiamati « minuendo » e « sottraendo ». Non nego che queste denominazioni siano giustificabili. Ma *sottraendo* e *sottrattore* suonano meglio, accanto a « moltiplicando » e « moltiplicatore », « dividendo » e « divisore ».

Considerata come operazione *fondamentale*, la divisione è « l' inversa della moltiplicazione » e, come tale, il suo risultato deve chiamarsi *quoto* (e non « quoziente »), come chiarirò più innanzi.

9. — Ciascuna di queste scritture si chiama *eguaglianza.*

Quanto sta alla *sinistra* del *segno* = si chiama *primo membro.*

E quanto sta alla sua *destra* si chiama *secondo membro.*

10. — Invece della frase

eseguire un'addizione,

si dice: *addizionare.*

Ed analogamente:

sottrarre, moltiplicare, dividere.

11. — Invece di «addizionare 21 con 3» si può dire:

aggiungere 3 a 21.

Ed invece di «sottrarre» si usa anche dire: *togliere.* (1)

12. — Si sono inventate *macchine calcolatrici,* le quali *eseguiscono* una qualunque delle quattro operazioni fondamentali.

Ma è pur sempre l'*uomo* che, di volta in volta, decide *quale operazione* giova eseguire.

13. — Molti fanciulli sanno *eseguire macchinalmente* le quattro operazioni; e, se lo fanno con sicurezza e rapidità, è cosa buona.

---

(1) Molti dicono «sommare». Ma, come «verbo principale» preferisco *addizionare,* per accordare col «nome dell'operazione» (come tutti fanno per le altre tre operazioni) e non col «nome del risultato».

E, come «verbi sussidiari», accolgo: *aggiungere,* perchè consente «lo scambio degli addendi» nel «discorso», senza scambiarli nella «operazione»; e *togliere,* perchè la parola «togliendo» dispensa dall' usare «sottraendo» quale «gerundio», oltrechè quale «sostantivo».

Ma pochissimi riescono a *capire*, con altrettanta sicurezza e rapidità, *quali operazioni* occorra eseguire per *risolvere* un *problema* (una *questione*), anche se molto semplice.

14. — Quindi, ancorchè il mio giovane lettore sia esperto nella *esecuzione* delle quattro operazioni, non sarà inutile ch' io gli chiarisca il *significato* di queste: per addestrarlo gradualmente alla risoluzione di problemi sempre più difficili, il che potrà riuscirgli utile e dilettevole.

§ 2. — Somma di due numeri

1. — Supponiamo di avere due mucchietti di sassolini.

Li abbiamo *contati separatamente*.

Nell'uno ve ne sono 25 e nell'altro 14.

Se li *riuniamo*, quanti sassolini avremo nel nuovo mucchio?

2. — Per rispondere, il mio giovane lettore, che sa *addizionare numeri*, può accontentarsi di *imaginare* il nuovo mucchio.

Ma Luigino, che ha imparato soltanto a *contare oggetti*, non può accontentarsi di *imaginare* il nuovo mucchio: ha bisogno di *formarlo*.

3. — Mentre egli sta per *riunire* i sassolini, allo scopo di *ricontarli tutti assieme*, possiamo aiutarlo a risparmiare un po' di tempo e di fatica.

4. — Poichè i sassolini del primo mucchio sono 25, anche a *ricontarli* verrebbero adoperati i numeri naturali da 1 a 25.

Or dunque egli potrà mettere nel *primo* mucchio *un* sassolino del *secondo*, dicendo 26 (come se *continuasse a contare*), *un altro* sassolino del secondo, dicendo 27, e così via, sino ad aver messo nel primo mucchio, ad uno ad uno, i 14 sassolini del secondo.

5. — Così *facendo* e *contando*, egli avrà adoperato i 14 numeri naturali *successivi* di 25 e cioè:

26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

E *concluderà*, come voi, che i sassolini sono 39.

6. — In tal modo, Luigino ha *calcolato* la *somma*

$$25 + 14$$

press'a poco come facevano gli antichi: i quali, per eseguire le operazioni coi numeri, si aiutavano appunto con le pietruzze (in latino «calculus»).

7. — Sicchè,

$$25 + 14 = 39$$

perchè 39 è *il quattordicesimo successivo* di 25.

8. — Sappiamo che la successione naturale *non ha fine*. Quindi, scelto in essa un numero qualunque, si possono *contare* quanti si vogliano suoi *successivi*.

E perciò: l'*addizione è sempre eseguibile*.

9. — Se noi avessimo consigliato Luigino a trasportare nel *secondo* mucchio, ad uno ad uno, i sassolini del *primo*, lo avremmo costretto a maggior fatica.

Infatti, invece di *adoperare* e *contare* i 14 successivi di 25, egli avrebbe dovuto *adoperare* e *contare* i 25 successivi di 14.

10. — Così facendo, egli avrebbe *calcolato* la *somma*

$$14 + 25.$$

Però i sassolini sono sempre quelli e quindi il loro numero è sempre 39.

Sicchè, $14 + 25 = 39.$

11. — Or dunque:

$$25 + 14 = 14 + 25$$

e similmente per altri due numeri qualunque.

Quando, come in questo caso, il segno = sta fra due *operazioni indicate*, esso serve a dire che il *risultato* della prima operazione ***è lo stesso che*** il ***risultato*** della seconda; e lo si legge:

è eguale a. [1]

12. — Si conclude che:

la somma di due numeri non cambia, cambiando l'ordine degli addendi.

Brevemente: l'***addizione*** è ***commutativa.***

13. — Invece di ***sassolini***, si possono adoperare (come oggetti) i ***numeri naturali*** (scritti o pronunciati o soltanto pensati).

Ad es., proponiamo a Luigino di trovare quanto faccia

$$3 + 497$$

dicendo e *contando* i 497 *successivi* di 3.

---

(1) In latino, da «aequus» derivano:

«aequalis», «aequale», da cui in italiano *eguale*;

od anche «aequo», da cui in italiano *equo*, che sta solo ed inoltre nelle parole composte: *equatore*, *equidistante*, *equilatero*, *equilibrio*, *equivalente*, *equivoco*, *in-iquo*, ecc.

14. — Luigino incomincia:
4 uno, 5 due, 6 tre, 7 quattro, . . .
Ma poi si stanca, si confonde e smette.

15. — Per rianimarlo, proponiamogli invece di trovare quanto faccia

$$497 + 3$$

dicendo e *contando* i 3 *successivi* di 497.
Luigino dice:
498 uno, 499 due, 500 tre.
Ed ha bell'e finito.

16. — Poichè

$$497 + 3 = 500$$

e l'addizione è *commutativa*, anche

$$3 + 497 = 500.$$

17. — Con lo scambio degli addendi, Luigino ha *abbreviato* l'*operazione proposta* e cioè: egli ha eseguito un'*altra operazione*, più *rapida*, ma che *doveva* dare *lo stesso risultato*.

18. — Si conclude che, nell'*eseguire* un'*addizione* contando, giova *adoperare* gli *addendi* in *ordine decrescente* (cioè: dare la *precedenza* al *maggiore*).

19. — *Quanti* sono i *numeri naturali* da 0 a 23?
Lo 0 è *uno*, e quelli da 1 a 23 sappiamo che sono *ventitrè*.
Sicchè: i numeri naturali da 0 a 23 sono

$$1 + 23$$

o meglio $23 + 1$

cioè *il successivo* di 23, che è 24.

20. — *Quante* sono le *cifre*?

Le *cifre* (numeri naturali da 0 a 9) sono 9 + 1, cioè 10.

21. — In un vasetto stanno alcune *rose* ed in un altro tanno alcuni *garofani.*

Luigino ha contato: 5 rose e 4 garofani.

Gli domandiamo di dirci *quanti* siano quei *fiori*, senza toccarli, anzi senza neppure guardarli.

Egli pensa:
le rose sono 5, ed *un* garofano 6, e *due* garofani 7, e *tre* garofani 8, e *quattro* garofani 9.

E risponde: quei fiori sono 9.

22. — Egli ha eseguito l'addizione:

$$5 + 4 = 9.$$

Frattanto Giulietta (una sorella di Luigino, che ha un anno meno di lui) ha tolto dai due vasetti le rose ed i garofani e ne ha composto un mazzolino.

23. — Alla ***riunione*** dei *due gruppi* corrisponde l'***addizione*** dei *due numeri.*

Ma quella è un'*operazione manuale* (che si fa con le mani) e questa è un'*operazione intellettuale* (che si fa col cervello).

E perciò le due operazioni possono essere eseguite *insieme*; ma anche *separatamente*, come hanno fatto Giulietta e Luigino.

24. — Quanti pennini vi sono in due scatole, se una ne contiene 27 e l'altra è vuota?

$$27 + 0 = 27$$

od anche

$$0 + 27 = 27.$$

25. — Dunque: la *somma* di due numeri naturali, uno dei quali sia *zero*, è eguale all'*altro*.

26. — Sappiamo che $31 + 5$ è il quinto *successivo* di 31. Quindi (nella successione naturale), $31 + 5$ viene dopo di 31.

Brevemente,

$31 + 5$ è *maggiore* di 31.

27. — Per la stessa ragione,

$5 + 31$ è *maggiore* di 5

e quindi, scambiando i due addendi, anche

$31 + 5$ è *maggiore* di 5.

28. — Riassumendo,

$31 + 5$ è *maggiore* di 31 e di 5.

Si giungerebbe alla stessa conclusione, considerando altri due numeri qualunque?

Sì, purchè siano *diversi da zero.*

29. — *La somma di due numeri naturali, diversi da zero, è maggiore di ciascuno di essi.*

30. — Ed ora rispondete alle *domande* che seguono e poi risolvete i *problemi*, eseguendo le *addizioni* come siete abituati a fare.

DOMANDE

1. — Il *successivo* di 7 è *minore* o *maggiore* del *precedente* di 9?

2. — Come si *indica* e qual è il *quarto successivo* di 5? di 0?

3. — Quanto fa $4 + 0$? $0 + 0$?

4. — Come si può trovare rapidamente il *quarantottesimo successivo* di 2?

5. — Quanti sono i numeri (naturali) da 0 a 99? da 0 a 100?

Problemi

1. — Chi parte da Milano, col diretto delle (ore) 18, impiega 6 ore per giungere a Modena.

A che ora vi arriva?

2. — Il Gennaio ha 31 giorni.

Quanti giorni dell'anno sono trascorsi alla mezzanotte del 15 febbraio?

3. — La torre degli Asinelli, a Bologna, è alta m. 107.

Ma la piramide di Cheops, in Egitto, è alta 30 m. di più.

Quanto è alta?

4. — La più alta costruzione muraria d'Europa è la Mole Antonelliana, a Torino: supera di 25 m. la piramide di Cheops.

Quant'è alta la Mole Antonelliana?

5. — In che anno è nato il mio giovane lettore? in qual anno sarà maggiorenne (cioè: compirà 21 anni)?

6. — La stoffa per un vestito è costata L. 320 e la fattura (con le forniture) L 140.

Quant'è costato quel vestito?

7. — Al principio di settembre, un calzolaio possedeva L. 852. Durante quel mese. ha risparmiato L. 148.

Quanto possedeva alla fine di settembre?

8. — Ieri, un panettiere ha venduto 145 kg. di pane nel mattino e 77 kg. nel pomeriggio.

Quanto nella giornata?

9. — La distanza (ferroviaria) da Venezia a Milano è km. 265 e quella da Milano a Torino è km. 150.

Quanti km. da Venezia a Torino (passando per Milano)?

10. — In una città vi sono 127·839 maschi e 128·742 femmine.

Quanti abitanti?

11. — Quando Giulio Verne ha narrato *Il giro del mondo in 80 giorni*, non si sarebbe potuto far più presto quel viaggio.

Ma ora, su treni e piroscafi, si può andare da Londra al Giappone:

in 24 giorni, attraverso l'oceano Atlantico, il Canadà e l'oceano Pacifico,

ed in 17 giorni, per Mosca, la Siberia e Vladivostok

Così, in quanti giorni, si può fare il giro del mondo?

§ 3. — Somma di parecchi numeri

1. — In una stalla, vi sono 4 buoi, 2 mucche e 3 vitelli. Quante bestie?

Fra buoi e mucche, sono $4 + 2$, cioè 6.

Sicchè, coi vitelli, sono $6 + 3$, cioè 9.

2. — Così, mediante *due addizioni successive*, abbiamo calcolato una ***somma di tre numeri***.

Potevamo ***indicarla*** sùbito con la scrittura

$$4 + 2 + 3$$

poi con $6 + 3$ ed infine con 9.

In una sola riga, mediante una *catena di eguaglianze*,

$$4 + 2 + 3 = 6 + 3 = 9.$$

3. — Potevamo considerare quelle bestie in altro *ordine*, ad es. mucche, vitelli e buoi, ottenendo:

$$2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 9.$$

4. — Il numero di quelle bestie si può calcolare in 6 modi diversi.

Ve ne ho indicati 2.

Dite gli altri, scrivendo le indicazioni relative.

5. — Il *risultato finale* è sempre *lo stesso.*

E ciò accadrebbe anche se si parlasse di *altre bestie* (ad es. cavalli, cavalle e puledri).

Ed anche se fossero *altri numeri.*

Ed anche se gli *addendi* fossero *più di tre.*

6. — Si conclude che:
la somma di quanti si vogliano numeri non cambia, cambiando l'ordine degli addendi.

Brevemente:
l'*addizione* (anche di parecchi numeri) è *commutativa.*

7. — Perciò si possono *adoperare* gli addendi nell'***ordine*** che meglio *conviene*, senza perder tempo a ***riscriverli*** (siano essi in riga od in colonna).

Ad es., dovendo calcolare

$$35 + 18 + 25$$

penso $35 + 25 = 60$ e poi $60 + 18 = 78$.

E a destra della somma indicata scrivo $= 78$, ottenendo: $35 + 18 + 25 = 78$.

8. — Se gli addendi sono molti e si addizionano ***saltuariamente***, giova ***sottosegnarli*** di mano in mano che si adoperano (per evitare di dimenticarne o di ripeterne).

9. — Quando si devono *addizionare* parecchi numeri, si mettono in *colonna*, nel modo che sapete.

Se avete addizionato dall'*alto* in *basso*, potete fare la *prova*, addizionando dal *basso* in *alto*.

Questa è un'*applicazione* della proprietà commutativa.

10. — Se la colonna è molto lunga (come accade nei libri di commercio), giova spezzarla.

Si calcolano separatamente ***le somme parziali***, e poi le si addizionano, ottenendo ***la somma totale.***

Voltate la pagina e ne troverete un esempio.

753	
8·387	
9·052	
49	18·241
350	
4·705	
28	
1·000	
38	6·121
24·362	24·362

Il 18·241 è la prima somma *parziale*, sino al 49, ed il 6·121 è la seconda somma *parziale*.

Il 24·362 è la somma *totale* (cioè: la somma delle due somme parziali e quindi anche di tutti i numeri dati).

11. — Se la somma totale era già calcolata, come somma di tutti i numeri dati, il calcolarla nuovamente, come somma di somme parziali, può servire di ***prova*** della prima operazione.

Così usano i contabili, scrivendo a matita (o in un pezzo di carta da gettar via) i numeri che, nell'es., sono scritti a destra.

12. — Sicchè: *dovendo addizionare parecchi numeri, questi si possono **associare** come si vuole* (per calcolare prima *le somme parziali* e poi *la somma totale*).

Brevemente: l'*addizione* è ***associativa***.

13. — Ogni *numero di due cifre* si può ***dissociare***, staccando le sue ***diecine*** (complete) dalle sue ***unità*** (residue).

Ad es.,

$$32 = 30 + 2$$

E perciò, dovendo calcolare *mentalmente*, ad es.,

$$75 + 4$$

dal 75 si *dissocia* il 5 e lo si *associa* al 4, ottenendo $70 + 9$, cioè 79.

Esercizi

Eseguire le addizioni indicate, ordinando ed associando gli addendi nel modo più comodo:

1. $27 + 3 + 16 + 4$
2. $39 + 27 + 23 + 11$
3. $382 + 85 + 18 + 15$
4. $721 + 155 + 79 + 45$.

Problemi

1\. — Il giorno in cui Pierino ha compiuto gli anni, ha ricevuto dal babbo 10 soldi, dalla mamma 5, dal fratello 3 e dalla sorella 2. Quanti soldi? Potrebbe cambiarli in una sola moneta?

2\. — Trovare il valore complessivo di un biglietto da L. 1000, uno da L. 500, uno da L. 100, uno da L. 50, uno da L. 25, uno da L. 10 e uno da L. 5.

3\. — Un libro è in tre volumi, di pagine 345, 321 e 334. Quante pagine in tutto?

4\. — La distanza (ferroviaria) da Pavia a Codogno è km. 48
da Codogno a Mantova 91
e da Mantova a Monselice 84
Quanti km. vi sono da Pavia a Monselice?

5\. — La distanza (ferroviaria) da Genova a Voghera è km. 83
da Voghera a Piacenza 59
e da Piacenza a Bologna 147
Invece, la distanza da Genova a Spezia è km. . 90
da Spezia a Parma 120
e da Parma a Bologna 90
Qual è la via più breve?

6\. — Da Torino a Modane vi sono km 105
da Modane a Culoz 135
e da Culoz a Parigi 559
Quanti km. vi sono da Torino a Parigi?

7. — Da Roma a Torino (per Genova) vi sono km. . . 665
da Torino a Parigi (per Modane) 799
e da Parigi a Londra (per Boulogne) 470
Quanti km. vi sono da Roma a Londra?

8. — Il circùito di Monza è composto di:
alcuni rettilinei, lunghi (insieme) m. 5·714
tre grandi curve, lunghe (insieme) m. 3·160
e sei piccole curve, lunghe (insieme) m. 1·126
Quant'è lungo il circùito di Monza?

9. — Pietro è uscito di casa per fare due compere.
In un negozio ha pagato L. 43.
Nell'altro ha dato le L. 28 che aveva ancora in tasca, ed è rimasto in debito di L. 4.
Con quante lire era uscito di casa? ed anzitutto quante lire ha speso nel secondo negozio?

10. — L'anno 1924 è *bisestile* (cioè: ha il febbraio di 29 giorni).
Quant'è lungo (cioè: di quanti giorni si compone) il primo trimestre? il secondo? il terzo? il quarto?
Ve ne sono di eguali (cioè: con lo stesso numero di giorni)? qual è il più lungo?

11. — Gli astronomi dicono *di prima grandezza* (apparente) *le stelle più luminose*, dicono *di seconda grandezza* quelle che sono *un po' meno luminose*, e così via.
Le stelle *di sesta grandezza* sono ancora *visibili* ad *occhio nudo* (cioè: senza *telescopio*) da una persona di vista media.

Le stelle di prima grandezza sono . .	20
di seconda grandezza . .	51
di terza » . . .	200
di quarta » . . .	595
di quinta » . . .	1213
di sesta »	3640

Quante sono le stelle visibili ad occhio nudo?
(Ma, da un punto qualunque della terra, se ne vede soltanto una parte).

DOMANDA INSIDIOSA

In uno scaffale di una biblioteca, c'era una *Divina Commedia* in 3 volumi, non rilegati, contenenti: l'*Inferno*, il *Purgatorio* ed il *Paradiso*.

Ogni volume, compresa la copertina e le pagine bianche, era composto di 100 fogli (e si sa che ogni foglio ha due pagine).

Un giorno, il bibliotecario s'accorse che un tarlo aveva forato tutti i fogli dal *primo* dell'*Inferno* all'*ultimo* del *Paradiso* (il primo e l'ultimo compresi).

Quanti fogli aveva forato quel tarlo?

(Troverete la *risposta* nella pagina seguente).

Giuochi

1. — *Un quadrato magico.*

Questo *quadrato* è detto *magico*, perchè gli antichi Magi di Persia credevano (o lasciavano credere) di poter curare varie malattie, applicandolo sulla parte inferma.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Si osservi che in ciascuno de' suoi nove quadratini è scritto uno dei numeri naturali da 1 a 9.

Si *addizionino* i tre numeri situati su ciascuna *riga* (orizzontale):

$$6 + 1 + 8$$
$$7 + 5 + 3$$
$$2 + 9 + 4$$

o su ciascuna *colonna* (verticale):

$$6 + 7 + 2$$
$$1 + 5 + 9$$
$$8 + 3 + 4$$

o su ciascuna *diagonale*:

$$6 + 5 + 4$$
$$2 + 5 + 8$$

Come risultano *fra loro* queste otto somme?

Mi occuperò più innanzi di altri *quadrati di numeri* (da 1 a 16 e da 1 a 25), nei quali (come in questo da 1 a 9) è *costante* la *somma* dei numeri situati su ciascuna *riga* o *colonna* o *diagonale*; e che perciò sono pure chiamati *quadrati magici*.

2. — *Un triangolo magico.*

Si osservi che i medesimi numeri naturali, da 1 a 9, si possono disporre a *triangolo*, in modo che, in ogni *lato* la *somma* dei quattro numeri sia la *stessa*.

```
      2
    3   9
  7       4
8   1   6   5
```

3. — *Come si possa indovinare l'età di una persona.*

Si preparino sette foglietti di carta, grandi come carte da giuoco.

Nel primo foglietto si scrivano i numeri naturali (non maggiori di 100): *uno si* e *uno no*, incominciando da 1,

1, 3, 5, . . . 99

Nel secondo: *due si* e *due no*, incominciando da 2,

2, 3, 6, 7, 10, . . . 98, 99

Nel terzo: *quattro si* e *quattro no*, incominciando da 4,

4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, . . . 100

Nel quarto: *otto si* ed *otto no*, incominciando da 8,

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, . . . 95

Nel quinto: *sedici si* e *sedici no*, incominciando da 16,

16, 17, . . . 31, 48, . . . 63, 80, . . . 95

Nel sesto: *trentadue si* e *trentadue no*, incominciando da 32,

32, 33, . . . 63, 96, . . . 100

E nel settimo: da 64 in poi,

64, 65, . . . 100.

Si chieda a qualcuno di dire in quali dei sette foglietti si trovi il numero dei suoi anni (ovvero, se la richiesta apparisse indiscreta, un numero qualunque da 1 a 100).

Se egli indica *un solo* foglietto, il numero da indovinare è *il primo* di quel foglietto.

Se invece egli indica *parecchi* foglietti, il numero da indovinare è la *somma* del *primo* numero di *ciascuno* di quei foglietti.

RISPOSTA ALLA DOMANDA INSIDIOSA

della pagina precedente

Parrebbe che i fogli forati dal tarlo fossero stati 100+100+100.

Ma, nello scaffale, i tre volumi erano ordinati *da sinistra a destra*, con le pagine ordinate *da destra a sinistra* (come potete verificare con tre libri qualunque).

Quindi, i fogli forati dal tarlo erano stati soltanto 1 + 100 + 1.

§ 4. — Somme progressive e regressive

1. — La Guida itineraria del Touring Club italiano fornisce, in tre colonne, tre specie di distanze: ***parziali, progressive*** e ***regressive.***

Ed affinchè l'approssimazione sia meno grossolana, le dà in hm. (ettometri).

2. — Ecco, ad es., le indicazioni per la strada da Girgenti a Caltanissetta:

	parz.	*progr.*	*regr.*
Girgenti (porta Atenea)		0	681
	17		
Girgenti (stazione)		17	664
	103		
Favara		120	561
	118		
Castrofilippo		238	443
	35		
Castrofilippo (staz.).		273	408
	70		
Canicattì		343	338
	95		
Bivio (per staz. di Serradifalco) .		438	243
	34		
Serradifalco		472	209
	124		
S. Cataldo		596	85
	85		
Caltanissetta (ingresso)		681	0

Ove nulla di diverso è indicato, le ***distanze*** sono misurate dal ***centro*** del paese.

3. — Un ciclista va da Girgenti a Caltanissetta.

Giunto a Castrofilippo (centro), si riposa al caffè e consulta la sua Guida.

L'ultimo tratto percorso (da Favara) era di hm. 118.

Il prossimo (fino alla stazione di Castrofilippo) sarà di hm. 35.

Sinora, egli ha percorso hm. 238 (da Girgenti).

Deve percorrere ancora hm. 443 (fino a Caltanissetta).

4. — Le distanze *progressive* (seconda colonna di numeri) *crescono* da 0 a 681 (distanza *totale*).

Le distanze *regressive* (terza colonna di numeri) *decrescono* da 681 a 0.

5. — In ogni riga, la *somma* delle due distanze, *progressiva* e *regressiva*, è la *distanza totale*.

Il verificarlo mentalmente, può servire ad accorgersi di un eventuale errore tipografico.

6. — Supponiamo di conoscere soltanto le distanze *parziali*.

La colonna delle distanze *progressive* si scrive dall'*alto* in basso, incominciando con 0.

Gli si aggiunge la distanza parziale 17.

$$0 + 17 = 17$$

Si scrive 17 e gli si aggiunge la distanza parziale 103.

$$17 + 103 = 120$$

Si scrive 120 e gli si aggiunge 118.

$$120 + 118 = 238.$$

E così via, sino a calcolare

$$596 + 85 = 681.$$

7. — La colonna delle distanze *regressive* si scrive dal *basso* in alto, incominciando con 0.

Gli si aggiunge la distanza parziale 85.

$$0 + 85 = 85$$

Si scrive 85 e gli si aggiunge 124.

$$85 + 124 = 209$$

E così via, sino a calcolare

$$664 + 17 = 681.$$

Problemi

1. — Eccovi le distanze parziali (in **hm.**) **della** strada **da Messina** al Faro.

Da Messina a Camavoja . .	42
da Camavoja a Pace . . .	19
da Pace a S. Agata . . .	26
da S. Agata a Ganzirri . .	7
da Ganzirri al Faro . . .	33

Compilate il prospetto completo, calcolando le distanze progressive e regressive.

2. — La primavera (astronomica) incomincia il 21 marzo.

In ***qual giorno*** (numero ordinale, progressivo) dell'anno?

(Il marzo è ***preceduto*** dai 31 giorni di gennaio e dai 28 o 29 giorni di febbraio, secondochè l'anno è ***comune*** o ***bisestile***).

3. — L'anniversario della fondazione di Roma si festeggia il 21 aprile.

In qual giorno dell'anno (secondochè questo è comune o bisestile)?

4. — Per poter dire sùbito ***qual giorno*** dell'anno corrisponda ad una ***data***, accanto al ***nome*** di ogni mese giova scrivere il ***numero*** dei giorni che lo ***precedono***: prima per gli anni ***comuni*** e poi per gli anni ***bisestili***.

Si incomincia così:

febbraio	31	31
marzo	59	60
aprile	90	91

Completate questo prospetto.

Ad es., per trovare prontamente qual giorno dell'anno sia il 9 aprile 1924, accanto ad «aprile» e nella seconda colonna (poichè il 1924 è «bisestile»), si legge 91.

Poichè $91 + 9 = 100$

si risponde che il 9 aprile 1924 è il ***centesimo*** giorno di quell'anno.

5. — L'autunno (astronomico) incomincia il 23 settembre.

In qual giorno dell'anno (comune o bisestile)?

6. — In qual giorno dell'anno è nato il lettore?

(Sono stati ***bisestili*** gli anni il cui numero si ricava da 1900 aggiungendo successivamente 4).

CAPITOLO IV

SOTTRAZIONE

§ 1. — Differenza

1. — Vi rammentate di Giulietta, la sorella di Luigino? Se n'è andata a giocare, prendendo alcuni dei nostri sassolini.

Domandiamo a Luigino *quanti* sassolini abbia portato con sè Giulietta.

Egli, che non vi ha badato, crede di doverle correr dietro, per informarsene.

2. — Ma noi lo tratteniamo e gli facciamo *contare* i sassolini rimasti. Sono 32.

Poichè prima erano 39, Giulietta ha preso *tanti* sassolini *quanti* sono i (numeri naturali) *successivi* di 32 sino a 39.

3. — Facciamo che Luigino *dica* e *conti* questi numeri: 33 uno, 34 due, 35 tre, 36 quattro, 37 cinque, 38 sei, e 39 sette.

Giulietta ha portato via 7 sassolini.

4. — In tal modo, Luigino ha calcolato il numero che bisogna *aggiungere* a 32 per ottenere 39, cioè la *differenza*

$$39 - 32$$

ed ha trovato che

$$39 - 32 = 7.$$

5. — Rientra Giulietta coi sassolini che aveva portato con sè.

Luigino li *conta.*

Sono proprio 7.

6. — Ora Luigino, che ha imparato, rammenta a Giulietta che i sassolini erano 39, e le propone di trovare *quanti* ne aveva lasciato.

7. — Giulietta aveva lasciato *tanti* sassolini *quanti* sono i *successivi* di 7 sino a 39.

E Luigino glieli fa *dire* e *contare*, così:
8 uno, 9 due, 10 tre, . 37 trenta, 38 trentuno, e 39 trentadue.

I sassolini lasciati da Giulietta erano 32.

8. — In tal modo, Giulietta ha calcolato la *differenza*

$$39 - 7$$

ed ha trovato che

$$39 - 7 = 32.$$

9. — Osservate che, nelle *due sottrazioni* eseguite da Luigino e da Giulietta, il *sottraendo* è *lo stesso*, ed invece il *sottrattore* e la *differenza* sono *scambiati.*

10. — Tale *scambio* (fra il *sottrattore* e la *differenza*) è sempre lecito (dopo aver eseguita una *sottrazione*), quali che siano le cose ed i numeri di cui ci si occupa.

11. — Sicchè, in tal modo, si potrebbe fare la ***prova*** di *una sottrazione*, mediante un'*altra sottrazione*.

Ma, come ben sapete e come dirò tra breve, la *prova* di una *sottrazione* si fa in altro modo, molto più comodo.

12. — Però, se ben rammentate, Giulietta ha dovuto lavorare più di Luigino.

Infatti, Luigino ha *detto* e *contato* 7 numeri, e Giulietta invece ha dovuto *dirne* e *contarne* 32.

13. — Eppure avrebbero potuto fare la stessa fatica.

In qual modo?

Dicendo e *contando* i *precedenti* di 39, così:
38 uno, 37 due, 36 tre, 35 quattro, 34 cinque, 33 sei, 32 sette.

A questo punto, Luigino avrebbe concluso che

$$39 - 32 = 7$$

e Giulietta che

$$39 - 7 = 32.$$

14. — Rammentiamo, per servircene in casi analoghi che

39 — 7 è *il settimo precedente* di 39

nella successione naturale.

15. — Luigino aveva 3 caramelle e le ha mangiate tutte.

3 ne aveva, 3 ne ha mangiate e 0 gliene sono rimaste.

$$3 - 3 = 0$$

16. — La conclusione sarebbe stata diversa, se le caramelle fossero state 5 e Luigino fosse stato così goloso da mangiarle tutte? o se, invece che caramelle, fossero stati confetti?

17. — Allorchè il ***sottrattore*** è *eguale* al (cioè: è lo stesso del) ***sottraendo***, la ***differenza*** è ***zero.***

18. — Anche Giulietta aveva 3 caramelle, ma ancora non ne ha mangiato alcuna.

3 ne aveva, 0 ne ha mangiate e 3 gliene sono rimaste.

$$3 - 0 = 3$$

19. — La ***differenza*** di due numeri naturali, il *secondo* dei quali sia ***zero***, è eguale al *primo.*

20. — Sappiamo che la successione naturale ha ***principio*** (con lo ***zero***) e non ha ***fine.***

Quindi, scelto in essa un numero qualunque, non si possono *contare* suoi ***precedenti***, più di quanti ve ne siano.

21. — Ad es., nella successione naturale, ***i precedenti*** di 25 sono:

0 1 2 ... 23 24

e questi numeri sono 25.

Dunque: ***i precedenti*** di 25 sono 25.

Perciò: il ***massimo*** numero, che la successione naturale consenta di *sottrarre* da 25, è 25.

22. — Sicchè: la successione naturale ***non consente*** l'uso di un ***sottrattore*** che sia ***maggiore*** del ***sottraendo.***

23. — Tuttavia, accade talvolta che una *questione* sia presentata in modo, da far ***sembrare*** necessario di calcolare la *differenza* di due numeri, il *secondo* dei quali sia *maggiore* del *primo.*

In tal caso, si *scambiano* i due numeri, si eseguisce la ***sottrazione*** e poi (quand'è possibile) si dà alla ***differenza*** il ***significato contrario*** a quello accennato nella *questione.*

24. — Ad es., in un certo giorno, un commerciante ha fatto due affari.

Se nel primo ha *guadagnato* L. 700 e nel secondo ha *perduto* L. 200, allora, in tutto, quanto ha *guadagnato*?

Egli ha guadagnato lire

$$700 - 200 = 500.$$

25. — Proviamo a ripetere la *questione*, cambiando soltanto i *numeri*.

In un certo giorno, un commerciante ha fatto due affari.

Se nel primo ha *guadagnato* L. 300 e nel secondo ha *perduto* L. 400, allora, in tutto, quanto ha *guadagnato*?

Sembrerebbe di dover rispondere, come prima, ch'egli ha *guadagnato* lire

$$300 - 400.$$

Il *non saper eseguire* questa sottrazione ci avverte che il numero cercato ha *il significato contrario* a quello accennato.

E perciò rispondiamo che quel negoziante ha *perduto* lire

$$400 - 300 = 100.$$

26. — Ed ora rispondete alle *domande* e poi risolvete i *problemi*, eseguendo le *sottrazioni* come siete abituati a fare.

DOMANDE

1. — Come si indica *e qual* è *il* quinto precedente *di 7? di 5?*

2. — Quanto fa 8 — 8? 1 — 1? 0 — 0? 7 — 0?

3. — Come si indica *e qual* è *il numero che bisogna* aggiungere *a 25, per ottenere 28?*

4. — Quali e quanti sono i successivi *di 12 sino a 17? i* precedenti *di 17 sino a 12?*

5. — *Quanti sono i numeri di* due cifre? *(quanti sono, insieme, quelli di* una cifra *e quelli di* due cifre, *cioè i numeri da 0 a 99? e quanti di questi sono di* una cifra?*)*

6. — *Quanti sono i numeri di* tre cifre?

Problemi

1. — Pitagora, grande matematico e filosofo, nacque a Samo nell'anno 570 a. C. (avanti Cristo) e visse 100 anni.
In che anno morì?

2. — In Siracusa, Archimede, matematico e fisico insigne, nacque l'anno 287 a. C. e morì l'anno 212 a. C.
Quanti anni visse?

3. — Giovanni Pier Luigi da Palestrina, eccellente compositore di musica sacra, morì a 69 anni, nel 1594 (si sottintende: dopo Cristo).
In che anno è nato?

4. — In una classe, gli alunni inscritti sono 35 ed, in un certo giorno, i presenti sono 31.
Quanti gli assenti?

5. — Di quanto la Madonnina del Duomo di Milano, (alta m. 109) è più bassa della cupola di S. Paolo a Londra (m. 110)? della cupola di S. Pietro in Roma (m. 132)?

6. — Ciascuno dei quattro piloni metallici della stazione radiotelegrafica ultrapotente di Coltano (fra Livorno e Pisa) è alto m. 250.
Di quanto l'altezza di ciascuno di quei piloni *supera* la somma delle altezze delle cupole di S. Pietro in Roma e di S. Paolo a Londra?

7. — La torre Eiffel, a Parigi, è la più alta costruzione d'Europa (m. 300).
Essa supera di m. 139 il campanile di Ulma (Württemberg), di m. 144 il campanile di Colonia, di m. 157 la torre della cattedrale di Strasburgo, di m. 179 il Torrazzo di Cremona.
Quanto è alto ciascuno di questi edifici?

8. — Di quanto il Cervino (m. 4478) supera il Piccolo Cervino (m. 3886)?

9. — L'Etna è il monte più alto della Sicilia ed il più alto vulcano d'Europa.

Ha un'altezza alquanto variabile, a cagione dei fenomeni vulcanici.

Nel 1865 era m. 3313 e nel 1900 era m. 3274.

Di quanti m. si era abbassato? in quanti anni?

10. — Antonio entra in un negozio e spende L. 53.

Consegna un biglietto da L. 100 ed attende il resto. Quanto?

11. — Biagio compera dal suo droghiere caffè, zucchero, olio e riso, per L. 179.

Ma paga solo L. 150.

Di quanto rimane debitore?

12. — Carlo deve L. 5823 a Diego.

Gli dà un acconto di L. 4500.

Quanto gli deve ancora?

13 — Enrico fa alcune compere, in un negozio di cui è buon cliente.

Il conto sarebbe di L. 248.

Ma il padrone del negozio gli fa un abbuono di L. 13.

Quanto spende?

14. — Cerco nell'indicatore ferroviario la distanza da Bologna a Pistoia.

Ma il foglio dov'era indicata la linea Bologna-Pistoia-Firenze è stato tolto.

È rimasto però il foglio seguente, dov'è indicata la linea inversa Firenze-Pistoia-Bologna ed in cui leggo le distanze *progressive*, in km., da Firenze: sino a Pistoia 34 e sino a Bologna 133.

Quanti km. da Bologna a Pistoia?

15. — Il centro della Terra dista da ciascuno dei due Poli km. 6356 e da un punto qualunque dell'Equatore km. 6377.

Di quanto differiscono le due distanze?

16. — Ho 54 anni ed ho un figlio di 29.

Quanti anni avevo, quand'egli è nato? quanti anni fa, aveva egli quell'età? quanti anni avevo io allora?

Quanti anni fa, avevo la sua età? e quanti anni aveva egli?

Fra quanti anni, avrà egli la mia età? e quanti anni avrei io, allora, se fossi ancor vivo?

17. — Il mio secondo figlio ha l'età ch'io avevo quand'è nato il primo.

Avrei sbagliato, dicendo invece che il primo ha l'età ch'io avevo quand'è nato il secondo?

Quanti anni aveva il primo, quand'è nato il secondo?

Quanti anni avrà ciascuno di essi, quando l'altro avrà la mia età?

§ 2. — Somme e differenze

1. — Rodolfo, il vinaio, ha l. 550 di vino in una botte non piena e l. 68 della stessa qualità in un barile pieno.

Per tema che il vino della botte gli si guasti, dà la colma alla botte con vino spillato dal barile.

Per far ciò, ha dovuto travasare l. 50.

Di quanti l. è capace la botte?

$$550 + 50 = 600.$$

Quanti l. di vino sono rimasti nel barile?

$$68 - 50 = 18.$$

2. — Appena Rodolfo ha finito il suo lavoro, entra un avventore che gli ordina un barile di quel vino.

— Questo barile le andrebbe? — fa Rodolfo al cliente, mostrandogli quello che poc'anzi era pieno.

— Benissimo.

E Rodolfo, contento della vendita, si rassegna a *disfare* il lavoro *fatto*, travasando l. 50 dalla botte nel barile.

Quanti l. di vino rimangono nella botte?

$$600 - 50 = 550.$$

Quanti l. contiene ora il barile?

$$18 + 50 = 68.$$

3. — E così, non senza fatica di Rodolfo, le cose sono ritornate come prima.

Ma noi possiamo trarre dall'accaduto parecchie utili conclusioni.

4. — Se ad un *primo* numero (ad es., 550) si *aggiunge* un *secondo* numero (ad es., 50) e poi (dalla somma ottenuta, cioè 600) si *sottrae* il *secondo* numero (cioè 50), si ritrova il *primo* numero (cioè 550).

5. — Brevemente:
la *sottrazione* è ***inversa*** dell'*addizione*.

6. — Nel caso considerato, invece di scrivere due eguaglianze

$$550 + 50 = 600 \quad \text{e} \quad 600 - 50 = 550$$

ne scrivo una sola

$$(550 + 50) - 50 = 550$$

cioè la seconda, in cui, al posto della *somma eseguita* 600, ho scritto la *somma indicata* 550 + 50, chiudendola fra *parentesi*.

7. — Analogamente, dovendo calcolare il *valore* dell'*espressione*

$$(785 + 397) - 397$$

basta accorgersi che si deve *aggiungere* e *sottrarre* (successivamente) uno *stesso numero*, per risparmiarsi ogni fatica e scriver subito, come *risultato finale*, il *primo addendo*.

Sicchè, immediatamente:

$$(785 + 397) - 397 = 785.$$

8. — Ed ancora: se da un *primo* numero (ad es., 68)

si *sottrae* un *secondo* numero (ad es., 50) e poi (alla differenza ottenuta, cioè 18) si *aggiunge* il *secondo* numero (cioè 50), si ritrova il *primo* numero (cioè 68).

9. — Brevemente:
l'*addizione* è *inversa* della *sottrazione*.

10. — Nel caso considerato, invece di scrivere due eguaglianze

$$68 - 50 = 18 \quad \text{e} \quad 18 + 50 = 68$$

ne scrivo una sola

$$(68 - 50) + 50 = 68$$

cioè la seconda, in cui, al posto della *differenza eseguita* 18, ho scritto la *differenza indicata* 68 — 50, chiudendola fra *parentesi*.

11. — Analogamente, dovendo calcolare il valore dell'espressione

$$(531 - 386) + 386$$

basta accorgersi che si deve *sottrarre* ed *aggiungere* (successivamente) uno stesso numero, per risparmiarsi ogni fatica e scriver subito, come *risultato finale*, il *sottraendo*.

Sicchè, immediatamente:

$$(531 - 386) + 386 = 531.$$

12. — Per altra via, si riconosce subito che *ciascuna* delle due operazioni di cui ci siamo occupati sin qui (*addizione* e *sottrazione*) è *inversa* dell'*altra*.

Basta rammentare, ad es., che

$5 + 3$ è il terzo *successivo* di 5

e che

$$5 - 3 \text{ è il terzo } \textit{precedente} \text{ di } 5.$$

13. — Abbiamo visto che si può fare la ***prova*** di una *sottrazione*, eseguendo un'*altra* ***sottrazione*** (mediante lo *scambio* del *sottrattore* e della *differenza*).

Ma riesce più comodo fare la ***prova*** di una *sottrazione*, mediante un'*addizione* (del ***sottrattore*** e della *differenza*).

Ad es., così:

$$15 - 7 = 8 \quad \text{perchè} \quad \mathbf{8 + 7 = 15.}$$

14. — Sappiamo, ad es., che

$$(58 + 23) - 23 = \mathbf{58}$$

cioè: se dalla *somma* di due numeri si ***toglie*** il ***secondo***, si ottiene il *primo*.

Ma (per la proprietà *commutativa* dell'*addizione*), invece di 58 + 23, possiamo scrivere 23 + 58, ottenendo:

$$(23 + 58) - 23 = 58$$

cioè: se dalla *somma* di due numeri si *toglie* il ***primo***, si ritrova il ***secondo***.

15. Riassumendo:
se dalla somma di due numeri si toglie uno di essi, si ritrova l'altro.

16. — Il lavoro fatto dal vinaio ci insegna dell' altro ancora.

Di quella qualità di vino egli aveva l. 550 in una botte e l. 68 in un barile.

In tutto, litri

$$550 + 68.$$

Dopo il primo travaso, i litri nella botte erano $550+50$ e nel barile $68-50$.

In tutto, litri

$$(550 + 50) + (68 - 50).$$

Ma la quantità *totale* del vino non è cambiata.

Perciò, dev'essere:

$$550 + 68 = (550 + 50) + (68 - 50).$$

17. — Si conclude che:

in ogni somma indicata, è lecito aggiungere un numero qualunque a un addendo, e togliere lo stesso numero all'altro addendo.

18. — Ora vi mostrerò come possiate servirvi di questa regola per insegnare a Luigino e a Giulietta a trovare la *somma* di due numeri di *una cifra.*

Prima, però, insegnerete loro, ad es., che

$$5 + 1$$

indica il numero *dopo* il 5, cioè 6, e che invece

$$5 - 1$$

indica il numero *prima* del 5, cioè 4.

(Per semplicità, userete con loro le parole *dopo* e *prima*, anzichè *successivo* e *precedente*).

19. — Es. I. (leggasi: *esercizio primo*)

$$5 + 3 = (5 + 1) + (3 - 1) = 6 + 2 = (6 + 1) + (2 - 1) = \\ = 7 + 1 = 8$$

Qui ho *scritto* quello che va *pensato.*

Ma ai vostri scolaretti farete *dire* soltanto:

$$5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1 = 8.$$

E similmente con altri numeri di una cifra, in ordine decrescente, la cui somma *non* sia *maggiore* di 10.

20. — Prima di passare al caso in cui i due numeri di una cifra abbiano somma *maggiore* di 10, insegnerete loro che:

$$10 + 1 = 11, \qquad 10 + 2 = 12 \ldots, 10 + 8 = 18$$

21. — Es. II.

$$8 + 6 = (8 + 1) + (6 - 1) = 9 + 5 = (9 + 1) + (5 - 1) = \\ = 10 + 4 = 14.$$

E farete *dire*:

$$8 + 6 = 9 + 5 = 10 + 4 = 14.$$

22. — Luigino e Giulietta dovranno esercitarsi a lungo in tal modo.

Frattanto, potete addestrare voi stessi al ***calcolo mentale*** della *somma* di due numeri di ***due cifre***, nel caso (meno semplice) in cui l'ultima cifra dell'uno e l'ultima cifra dell'altro abbiano una somma *maggiore* di 10.

23. — Es. III.

$$47 + 28 = (47 + 3) + (28 - 3) = 50 + 25 = 75.$$

Pensate così, ma *dite* senz'altro:

$$47 + 28 = 50 + 25 = 75.$$

24. — Es. IV.

$$47 + 28 = (47 - 2) + (28 + 2) = 45 + 30 = 75.$$

E così, applicando in *altro* modo la *stessa* regola:

$$47 + 28 = 45 + 30 = 75.$$

25. — Ieri, Luca e Matteo sono andati insieme a lavorare.

Uscendo di casa avevano in tasca: Luca L. 25 e Matteo L. 19.

Quante lire di più aveva Luca?

$$25 - 19 = 6.$$

26. — Hanno speso L. 8 ciascuno, per la colazione, rimanendo:

Luca con L. $25 - 8 = 17$

e Matteo con L. $19 - 8 = 11.$

Quante lire di più aveva Luca dopo la colazione?

$$17 - 11 = 6.$$

27. — Hanno avuto L. 24 ciascuno di paga, e così sono rincasati:

Luca con L. $17 + 24 = 41$

e Matteo con L. $11 + 24 = 35.$

Quante lire di più aveva Luca rincasando?

$$41 - 35 = 6.$$

28. — Che cosa ci insegnano, senza saperlo, Luca e Matteo?

Che $25 - 19 = (25 - 8) - (19 - 8)$

e che $17 - 11 = (17 + 24) - (11 + 24).$

29. — Cioè, che:

in ogni differenza indicata, è lecito togliere uno stesso numero, ovvero aggiungere uno stesso numero, al sottraendo e al sottrattore.

Nel primo caso, il numero che si toglie non dev'essere maggiore del sottrattore.

30. — Di questa duplice regola potete servirvi, per insegnare a Luigino e a Giulietta la *sottrazione*.

Allorchè sottraendo e sottrattore sono numeri di *una cifra*, farete *togliere 1* ad entrambi, e così continuerete come nell'Es. seguente.

31. — Es. V.

$$9 - 3 = (9 - 1) - (3 - 1) = 8 - 2 =$$
$$= (8 - 1) - (2 - 1) = 7 - 1 = 6$$

Farete *dire* soltanto:

$$9 - 3 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6\,.$$

32.—Allorchè, invece, il sottraendo è *maggiore* di 10 (ma il sottrattore e la differenza sono ancora numeri di *una cifra*), farete *aggiungere 1* al sottraendo e al sottrattore, e così continuerete come nell'Es. seguente.

33. — Es. VI.

$$15 - 8 = (15 + 1) - (8 + 1) = 16 - 9 =$$
$$= (16 + 1) - (9 + 1) = 17 - 10 = 7.$$

E farete *dire*:

$$15 - 8 = 16 - 9 = 17 - 10 = 7.$$

34. — Potete anche addestrare voi stessi al *calcolo mentale* della *differenza* di due numeri di *due cifre*, distinguendo due casi: secondochè l'ultima cifra del sottrattore *non è maggiore* ovvero *è maggiore* di quella del sottraendo.

35. — Es. VII.

$$98 - 35 = (98 - 5) - (35 - 5) = 93 - 30 = 63.$$

E voi *dite*:

$$98 - 35 = 93 - 30 = 63.$$

36. — **Es. VIII.**

$$75 - 38 = (75 + 2) - (38 + 2) = 77 - 40 = 37.$$

E voi *dite*:

$$75 - 38 = 77 - 40 = 37.$$

37. — Francesco esce di casa con L. 48.

In un negozio spende L. 23.

Rincasando, incontra Rinaldo, cui aveva prestato L. 10, e che gliele rende.

Con quante lire è rincasato Francesco?

Con

$$(48 - 23) + 10 = 25 + 10 = 35.$$

38. — In tal modo, le operazioni si succedono nell'ordine stesso dei fatti.

Ma le lire, con cui è rincasato Francesco, sarebbero state le stesse, se avesse incontrato Rinaldo prima di entrare nel negozio.

In tal caso, il conto sarebbe stato questo:

$$(48 + 10) - 23 = 58 - 23 = 35.$$

39. — Dal confronto risulta che

$$(48 - 23) + 10 = (48 + 10) - 23.$$

40. — Quindi:

allorchè su un numero si devono eseguire successivamente una sottrazione e un'addizione, è lecito di invertire l'ordine di esecuzione delle due operazioni.

41. — Anche se si devono eseguire successivamente un'*addizione* e una *sottrazione*, la *inversione* nell'ordine delle due operazioni non ne altera il *risultato finale*:

ma purchè tale *inversione* non impedisca di *eseguire* la sottrazione.

L'impedimento sorge allorchè il *primo addendo* è *minore* del *sottrattore*, come nel caso seguente.

42. — Pierino aveva 8 soldi.
La mamma gliene ha dati 5
Per rifornirsi di pennini, ne ha spesi 10.
Quanti soldi gli sono rimasti?

$$(8 + 5) - 10 = 13 - 10 = 3.$$

In questo caso, l'ordine delle due operazioni non può essere invertito, cioè non si può fare

$$(8 - 10) + 5.$$

Ed infatti, senza il dono della mamma, Pierino non avrebbe potuto comperare 10 soldi di pennini.

43. — Anche queste regole facilitano il *calcolo mentale*.
Es. IX.

$$(82 - 45) + 13 = (82 + 13) - 45 = 95 - 45 = 50.$$

E voi *dite*:

82 più 13 fa 95, meno 45 fa 50.

44. — Es. X.

$$(98 + 25) - 48 = (98 - 48) + 25 = 50 + 25 = 75.$$

E voi *dite*:

98 meno 48 fa 50, più 25 fa 75.

45. — Saverio esce di casa con L. 143.
In quattro botteghe diverse, egli spende (successivamente) L. 38, L. 4, L. 12, L. 7.

Con quante lire rincasa?

46. — Le lire possedute da Saverio, uscendo dal primo negozio, erano:

$$143 - 38 = 145 - 40 = 105.$$

Uscendo dal secondo negozio:

$$105 - 4 = 101.$$

Uscendo dal terzo:

$$101 - 12 = 100 - 11 = 99 - 10 = 89.$$

Uscendo dal quarto:

$$89 - 7 = 82.$$

Rincasa con L. 82.

47. — Ma possiamo ragionare in altro modo.

Calcoliamo la *somma* delle lire spese da Saverio:

$$38 + 4 + 12 + 7 = (38 + 12) + (4 + 7) = 50 + 11 = 61.$$

E poi calcoliamo la *differenza*:

$$143 - 61 = 142 - 60 = 82.$$

48. — Quindi:

allorchè da un numero se ne devono togliere (successivamente) ***parecchi, si può togliere invece la loro somma.***

49. — Es. XI.

$$(61 - 27) - 13 = 61 - (27 + 13) = 61 - 40 = 21.$$

E voi *dite*:

27 + 13 fa 40 e 61 — 40 fa 21.

50. — Se Saverio avesse fatto le medesime compere nelle medesime botteghe, ma *in ordine diverso*, egli sarebbe rincasato col medesimo numero di lire.

Sicchè: anche ***sottrazioni successive*** si possono *alternare* fra loro.

51. — Es. XII.

$$(91 - 58) - 31 = (91 - 31) - 58 = 60 - 58 = 2.$$

52. — Il signor Valentino, negoziante di cereali, è un uomo ordinato.

Ogni mattino verifica la *esistenza* di cassa, per accertarsi di non essere stato derubato nella notte.

Durante il giorno, annota ogni *entrata* (cioè: ogni pagamento che gli vien fatto) ed ogni *uscita* (cioè: ogni pagamento ch'egli fa).

E per quanto numerosi siano gli affari e qualunque ne sia l'ordine, egli fa sempre il conto serale con tre sole operazioni:

1) *addiziona* la *esistenza* del mattino e le *entrate*,
2) *addiziona* le *uscite*,
3) dalla ***prima*** somma *toglie* la *seconda*.

E così ottiene la *esistenza* della sera, ch'egli verifica prima di chiudere la cassa.

53. — E noi faremo come Valentino, sovratutto nel calcolo scritto (cioè quando dobbiamo operare con parecchi numeri di parecchie cifre).

Il calcolo si indica e si eseguisce, ad es., così:

$$51 + 41 - 18 - 27 + 31 + 21 - 36 - 45 =$$
$$= (51 + 41 + 31 + 21) - (18 + 27 + 36 + 45) =$$
$$= 144 - 126 = 18.$$

54. — In particolare:
una somma di differenze è eguale alla differenza tra la somma dei sottraendi e la somma dei sottrattori.

55. — Ad es.,

$$(53 - 28) + (54 - 27) + (55 - 26) =$$
$$= (53 + 54 + 55) - (28 + 27 + 26) = 162 - 81 = 81.$$

DOMANDE

1. — *Quanti sono i numeri naturali da 54 a 78?*
(Si supponga di aver scritto i numeri naturali da 1 a 78, e di aver poi cancellato quelli che non sono da 54 a 78.
Quanti vennero scritti e quanti vennero cancellati? e perciò, quanti ne rimasero?
Il numero cercato si può indicare, coi numeri dati, così:

$$78 - (54 - 1)$$

Cioè: per trovare quanti sono i numeri naturali, *da* uno di essi *ad* un altro, basta che dal *maggiore* si *tolga* il *precedente del minore,* cioè si tolga il minore diminuito di 1).

2. — *Quanti sono i numeri naturali compresi fra 54 e 78?*
(Sappiamo quanti sono i numeri naturali *da* 54 *a* 78. Per avere quelli *fra* 54 *e* 78, bisogna cancellare gli estremi: il 54 ed il 78.
Quanti ne rimangono?
Il numero cercato si può indicare, coi numeri dati, così:

$$(78 - 1) - 54$$

Cioè: per trovare quanti sono i numeri naturali *fra* due di essi, basta che dal *precedente del maggiore si tolga il minore.*

DOMANDA INSIDIOSA

Una lumaca si arrampica su un muro, alto 10 m.
Ogni giorno sale 3 m. ed ogni notte scende 2 m.
Dopo quanti giorni giungerà al sommo del muro?

La lumaca giungerà al sommo del muro l'ottavo giorno, prima che annotti.

Infatti: in un giorno e una notte, essa sale m. 3 — 2, cioé 1 m.

Quindi, *parrebbe* che dovesse impiegare 10 giorni.

Ma, invece, dopo 7 giorni e 7 notti, sarà salita 7 m. Ed allora, nell'ottavo giorno, salendo ancora 3 m., arriverà al sommo.

Esercizi di calcolo mentale

1. (456 + 345) — 345
2. (987 — 321) + 321
3. (45 + 18) + (45 — 18)
4. 49 + 17
5. 901 + 99
6. (725 — 83) — (625 — 83)
7. (864 + 39) — (420 + 39)
8. 84 — 49
9. 354 + 687 — 354 + 312
10. 75 — 39 + 24
11. 100 — 48 — 37 — 15
12. 61 — 39 + 27 — 41
13. (63 — 29) + (73 — 19) + (61 — 49)

(Si addizionino i sottraendi aumentati di 1, poi si addizionino i sottrattori pure aumentati di 1, ed infine si eseguisca la sottrazione).

14. 7531 + 2468 — 8765

(Procedendo da sinistra a destra si eseguiscano *contemporaneamente* l'addizione e la sottrazione. Si incomincia così: 1 più 8 fa 9, meno 5 fa 4; e si scrive il 4).

15. 98·765 — 53·087 — 33·338

(Procedendo da destra a sinistra,si addizionino i sottrattori e *contemporaneamente* si eseguisca la sottrazione).

16. 815 — 273 + 185 — 327.

(Dalla somma del primo e del terzo numero si tolga la somma degli altri due).

Problemi

1. — L'anno scorso, a Torino, il primo di luglio, la temperatura massima è stata di 29 gradi e la minima di 21.

Quale fu l'*oscillazione* (fra il minimo ed il massimo)?

Il primo di gennaio, la temperatura massima era stata di 8 gradi e la minima di 5 gradi sotto zero.

Quale oscillazione?

2. — Carlo compera una camicia per L. 32 ed una cravatta per L. 12.

Consegna un biglietto da L. 50.

Quanto di resto?

3. — Rodolfo, il vinaio, ha due barili pieni di una stessa qualità di vino: uno da l. 129 e l'altro da l. 35.

Un compratore trova che il primo è troppo grande e che il secondo è troppo piccolo.

Il vinaio gli propone di riempirgli un barile, vuoto, da l. 72.

E così viene stabilito.

Quanto di quel vino rimane al vinaio?

4. — Il Colle del Viso è alto m. 2650.

Di là alla cima del Monviso bisogna superare un dislivello di m. 1101.

Invece, dal Colle al Viso Mozzo si sale di m. 369.

Quanto sono alti i due monti? e di quanto il primo supera il secondo? — Si può rispondere subito alla seconda domanda?

5. — Stefano ha venduto per L. 1850 un sacco di caffè, che gli era costato L. 1935, ed ha venduto per L. 620 un sacco di zucchero, che gli era costato L. 530.

Quanto ha perduto nella prima vendita? quanto ha guadagnato nella seconda?

Complessivamente, ha guadagnato o perduto? e quanto?

6. — L'indicatore ferroviario fornisce le seguenti distanze *progressive*, in km., da Venezia:

a Mestre 9, a Mogliano 19, a Treviso 30, a Conegliano 57, a Sacile 74, a Pordenone 87, a Casarsa 102, a Codroipo 113, a Pasian Schiavonesco 125, a Udine 136.

Calcolate le distanze *parziali* e servitevene per calcolare le distanze *regressive*.

7. — Ieri, Rodolfo, il vinaio, ha messo mano a una botte di vino da l. 600.

Ne ha venduto successivamente l. 125, l. 48, l. 26, l. 99.

Col vino rimasto ha riempito un'altra botte ed un fiasco da l. 2.

Qual è la capacità della seconda botte?

8. — Ecco le annotazioni fatte ieri dal signor Valentino, il negoziante di cereali:

esistenza in cassa L. 7845, entrata L. 237, entrata L. 648,

uscita L. 3087, entrata L. 447, uscita L. 1130, uscita L. 1462, entrata L. 823.

Qual era l'esistenza in cassa, ieri sera?

9. — Il treno celere, da Venezia a Milano, parte alle 11 e 30 (intendasi: ore 11 e minuti 30) ed arriva alle 16 e 45.

Quanto tempo (ore e minuti) impiega?

(Si sottraggano separatamente: ore da ore, e minuti da minuti).

10. — Quanto tempo impiega il diretto, che parte da Venezia alle 17 e 45 ed arriva a Milano alle 23 e 40?

(Giova fingere che il treno parta ed arrivi 15 minuti dopo: il che non altera il tempo impiegato.

In altro modo, si può fingere che il treno arrivi 5 minuti dopo, e togliere poi questi 5 minuti).

11. — Un altro diretto parte da Venezia alle 22 ed arriva a Milano l'indomani alle 6.

Quanto tempo impiega?

(Quante ore viaggia il giorno della partenza e quante all'indomani?)

12. — Un treno accelerato parte da Venezia alle 23 e 45 ed arriva a Milano l'indomani alle 10.

Quanto (tempo) impiega?

13. — Nel volgere di un giorno, la temperatura di un ammalato si è innalzata da 37 e 8 (sottintendasi: 37 gradi ed 8 decimi) a 39 e 3.

Di quanto?

(Di quanti *decimi* si è innalzata per raggiungere i 38 *gradi*? di quanto è salita ancora?)

14. — Un negoziante italiano ha comperato alcune merci da un negoziante inglese, spendendo Lst. 10.13.6 (lire sterline 10, scellini 13 e denari 6) per il costo all'origine e Lst. 2.6.4 per il nolo e l'assicurazione.

Quanto ha speso?

(Si addizionino separatamente: sterline con sterline, scellini con scellini, e denari con denari).

15. — Poco dopo, l'inglese ha comperato dall'italiano altre merci, spendendo Lst. 8.12.7 di costo e Lst. 1.7.8 di nolo ed assicurazione.

Quanto ha speso?

Addizionando denari con denari, si ottiene un numero maggiore di 12. Poichè 12 denari fanno 1 scellino, si tolga 12 e si scriva la differenza. — Poi si addizionino scellini con scellini, non dimen-

ticando 1 scellino di riporto. — Se, per caso, la somma degli scellini risultasse 20, si rammenti che 20 scellini fanno una sterlina: in tal caso, si scriva 0 scellini e si riporti una sterlina).

16. — Invece di eseguire separatamente i due pagamenti, l'italiano paga all'inglese la differenza.

Quanto?

(Si sottraggono separatamente : sterline da sterline, scellini da scellini e denari da denari).

17. — Un'altra volta l'inglese doveva all' italiano Lst. 15.4.6 e l'italiano doveva all'inglese Lst. 7.8.9.

L'inglese ha pagato la differenza. Quanto?

(Poichè gli scellini e i denari del sottraendo sono meno di quelli del sottrattore, si cambi una sterlina del sottraendo in 20 scellini, ed uno di questi in 12 denari. Provvisoriamente, il sottraendo diventa : Lst. 14.23.18. — Dopo ciò, si eseguisce la sottrazione, termine a termine).

Giuochi

Altri due quadrati magici.

Li completi il lettore, scrivendo il numero necessario in ogni quadratino vuoto.

1			4
	6	7	
8		11	
13	3		16

18		21	10	12
	23		11	20
25		13		
6			3	
14	16	5		8

(Per ciascun quadrato, calcoli *la somma costante*, servendosi della *diagonale completa*. Poi, servendosi della somma trovata, completi l'*altra diagonale* ed ogni *riga* o *colonna* in cui vi sia

ancora un solo quadratino vuoto. Quando, nello scrivere il numero che completa una *riga*, venga a completare una *colonna* (o viceversa), osservi che anche in essa si ha la medesima *somma*: dal che risulta che il *quadrato* è *magico*.

Infine, osservi che i quadratini sono occupati dai numeri naturali: da 1 a 16, nel primo quadrato; da 1 a 25, nel secondo).

§ 3. — I numeri romani

1. — Oggi ancora i *numeri romani* sono adoperati nelle lapidi per indicare le *date*, negli orologi per indicare le *ore*, nei libri per numerare i *capitoli*, ecc.

Quindi, giova conoscerli.

2. — Lo storico **Mommsen** ritenne che i romani indicassero i numeri

1   5   10

con *figure*, le quali rappresentavano

un dito teso   *una mano aperta*   *due mani aperte*

e che poi si semplificarono, confondendosi con le *lettere*

I   V   X

3. — Nell'Aritmetica di **Boezio** (morto nell'anno 525), le lettere

I   V   X   L   C   D   M

indicano i numeri

1   5   10   50   100   500   1000

4. — Con questi *segni* e mediante *addizioni*, i romani *componevano* i numeri: scrivendo *consecutivamente* gli addendi *eguali* ed in ordine *decrescente* quelli *diversi*.

5. — **Ad es.**, in

XX settembre MDCCCLXX

(data della liberazione di Roma), si ha:

$$XX = 10 + 10 = 20$$
$$MDCCCLXX = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + + 10 + 10 = 1870.$$

6. — Naturalmente, non si scrivevano addendi *eguali*, la cui *somma* si potesse indicare con un solo *segno*.

Perciò, non si ripetevano *mai* i segni V, L, D.

7. — In *Boezio*, il 4 ed il 9 sono indicati con IIII e VIIII.

8. — Per evitare di scrivere quattro volte di sèguito uno qualunque dei segni

I X C

si ricorse poi alla *sottrazione*.

Per scrivere 4, invece che IIII, si scrisse IV, intendendo 5 — 1.

Per scrivere 9, invece che VIIII, si scrisse IX, intendendo 10 — 1.

Per scrivere 40, invece che XXXX, si scrisse XL, intendendo 50 — 10.

Per scrivere 90, invece che LXXXX, si scrisse XC, intendendo 100 — 10.

Per scrivere 400, invece che CCCC, si scrisse CD, intendendo 500 — 100.

Per scrivere 900, invece che DCCCC, si scrisse CM intendendo 1000 — 100.

9\. — Ad es., in

XXIV maggio MCMXV

(data della nostra dichiarazione di guerra all' Austria) si ha:

$$XXIV = 10 + 10 + 4 = 24$$
$$MCMXV = 1000 + 900 + 10 + 5 = 1915.$$

10\. — Carlo Goldoni nacque a Venezia nel 1707 e morì a Parigi nel 1793.

Per scrivere queste date in numeri romani, si pensa:

$$1707 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 5 + 1 + 1 = MDCCVII$$
$$1793 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 90 + 1 + 1 + 1 = \\ = MDCCXCIII.$$

11\. — Negli esempi che precedono, ogni numero romano va letto come *numero cardinale.*

Invece, negli esempi che seguono, ogni numero romano va letto come *numero ordinale*:

Il re d'Italia è Vittorio Emanuele III,
il papa è Pio XI,
questo è il capitolo IV,
io sono nato nel secolo XIX
ed il mio giovane lettore è nato nel secolo XX.

12\. Ecco un es., in cui sono adoperati tre numeri romani, il primo dei quali richiede lettura *ordinale,* mentre gli altri due richiedono lettura *cardinale:*

Napoleone I è morto a S. Elena il V maggio MDCCCXXI.

13\. — Come i romani scrivessero i numeri dal 2000 in poi, dirò nel Cap. V.

Esercizi

Leggere i numeri romani usati nei seguenti Es. e scrivere i numeri romani corrispondenti ai numeri comuni che vi si trovano.

1. — Dante nacque nel 1265 e morì, a Ravenna, il XIV settembre MCCCXXI.

2. — Francesco Petrarca nacque, in Arezzo, il

XX luglio MCCCIV

e morì, in Arquà, il

XX luglio MCCCLXXIV.

Quanti anni è vissuto?

3. — Giovanni Boccaccio nacque, a Parigi, nel 1313 e morì, a Certaldo, il

XXI dicembre MCCCLXXV.

4. — Nicolò Machiavelli nacque nel 1469 e morì nel 1527.

5. — Galileo Galilei nacque, a Pisa, il

XV febbraio MDLXIV

e morì, in Arcetri, il giorno

VIII gennaio MDCXLII.

6. — Alessandro Manzoni nacque, a Milano, il 7 marzo 1785 e morì, pure a Milano, il 22 maggio 1873.

§ 4. — Le ingegnosità del vinaio

1. — Due vicini di Rodolfo gli ordinarono di mandar loro a casa, l'uno 10 litri e l'altro 5 del solito vino.

Il vinaio aveva un fiascone da 10 litri, ma non ne aveva da 5. Quindi ordinò al figlio Edoardo di spillare dalla botte 5 litri, uno per volta, in un fiascone da 7 litri.

Disgrazia volle che, mentre Edoardo si accingeva a

ciò fare, il boccale da litro gli sfuggisse di mano e andasse in frantumi.

Rodolfo rimproverò il figlio della sua sbadataggine; ma questi, anzichè piagnucolare vanamente, pensava ad un qualche rimedio.

2. — Sai come farò? — disse a un tratto Edoardo.

Riempirò quel fiascone da 8 litri e poi con esso riempirò quello da 7.

Così, in quello da 8 litri ne rimarrà 1, che provvisoriamente metterò da parte, nel fiascone da 10 litri.

Vuotato il fiascone da 7 litri in quello da 8, e data la colma a questo con vino spillato dalla botte, ricomincerò da capo.

Eseguendo 5 volte il mio lavoro, nel fiascone da 10 litri ne avrò adunati 5, che finalmente travaserò in quello da 7.

3. — Rodolfo, compiacendosi del buon volere del figlio e della sua prontezza, subito gli perdonò.

Ma, non appena Edoardo ebbe riempito il fiascone da 8 litri, gli ordinò di riempire anche quello da 7, con gran stupore del figlio.

Ed ora—disse Rodolfo—vuota il fiascone da 8 litri in quello da 10 e a questo dà la colma con quello da 7.

Edoardo così fece e francamente riconobbe, entro di sè, che il rimedio usato dal padre era stato più pronto di quello da lui proposto.

4. — Mentre Edoardo porta ai due clienti il vino che avevano ordinato, il mio giovane lettore ha tempo di pensare che, vuotato il fiascone da 8 litri in quello da 10, per dare la colma a questo mancavano litri

$$10 - 8 = 2$$

e poichè essi furono tolti dal fiascone da 7 litri, in questo ne rimasero appunto

$$7 - 2 = 5.$$

5. — In altro modo: per riempire i due fiasconi da 8 litri e da 7, dalla botte erano stati spillati litri

$$8 + 7 = 15$$

e perciò, di quel vino avendo riempito il fiascone da 10, il vino restante era appunto litri

$$15 - 10 = 5$$

6. — In altro modo ancora, il lavoro eseguito da Edoardo si può indicare col seguente prospetto:

capacità in litri dei tre fiasconi.	7	8	10
loro contenuto	0	0	0
si riempiono i primi due	7	8	0
si travasa il secondo nel terzo	7	0	8
col primo si colma il terzo	5	0	10

7. — Ma la storia non è finita.

Venne di poi un contadino, che, fattosi riempire il fiascone da 8 litri, seco lo portò, pagando vino e fiascone.

Ora il caso volle che, mentre Edoardo faceva ritorno coi fiasconi vuoti da 7 e da 10 litri, altri due avventori ordinassero 8 litri di vino, ciascuno, da portare alle lor case.

8. — Dov'è il fiascone da 8 litri?—chiese Edoardo, cercando intorno con gli occhi.

— Non c'è più — rispose il padre — perchè dianzi l'ho venduto.

— Ed ora, come faremo? — domandò il figlio.

— È appunto quello cui stavo pensando — disse Rodolfo. — Intanto prendi giù quel fiascone vuoto da 9 litri, perchè altro non abbiamo che ci possa giovare.

9. — Mentre il padre stava meditando, Edoardo fece questa proposta:

— Riempirò il fiascone da 9 litri e di quel vino mi varrò per riempire quello da 7.

Così, in quello da 9 rimarranno 2 litri di vino, che metterò nel fiascone da 10.

Vuotato il fiascone da 7 litri in quello da 9, e data la colma a questo con vino spillato dalla botte, ricomincerò da capo.

Eseguendo 4 volte il mio lavoro, avrò adunati 8 litri nel fiascone da 10.

10. — Così si potrebbe fare — replicò Rodolfo — se ad uno soltanto dovessimo consegnare 8 litri di vino.

Ma, poichè altri fiasconi non abbiamo, come potresti poi misurare e consegnare gli altri 8 litri?

— Pazienza! — esclamò Edoardo — Prima farò la consegna ad uno e poi, riportato il fiascone vuoto, ricomincerò da capo per servire l'altro.

— Lodo il tuo buon volere — disse Rodolfo — ma ho pensato un modo migliore per toglierci d'impaccio.

Fai quel che ti dico.

11. — Or mentre Edoardo obbedisce al padre, senza seguirne il pensiero, vi indico in un prospetto le varie fasi del suo lavoro, segnando anzitutto:

	7	9	10
la capacità in litri dei tre fiasconi	7	9	10
ed il loro contenuto	0	0	0
Riempi il secondo (ordina Rodolfo). . . .	0	9	0
e travasalo nel terzo.	0	0	9
Dalla botte, riempi il primo	7	0	9
e con esso colma il terzo	6	0	10
Col terzo riempi il secondo	6	9	1
e col secondo colma il primo	7	8	1
Travasa il primo nel terzo	0	8	8

prendilo su col secondo, e vai a fare le due consegne.

Edoardo così fece, grato al padre di avergli risparmiato non breve cammino.

Giuochi

1. — Misurare 5 litri di vino, con due fiasconi *vuoti*, da 7 e da 9.
(Si traduca in parole il procedimento indicato nel primo prospetto).

7	9
0	0
7	0
0	7
7	7
5	9

2. — Misurare 5 litri di vino, con due **fiasconi** *pieni*, da 7 e da 9, e la botte *vuota*.
(Si interpreti il secondo prospetto).

7	9	botte
7	9	0
7	0	9
0	7	9
7	7	2
5	9	2

3. — Misurare 3 litri di vino, coi dati dell'Es. 2.
(Eseguito quanto indica il secondo prospetto, si faccia quanto indica il terzo).

5	0	11
0	5	11
7	5	4
3	9	4

4. — Misurare *un* litro di vino, coi dati dell'Es. 2.

(Si prepari un prospetto che faccia seguito al terzo, come questo fa seguito al secondo).

5. — Con due fiasconi *pieni*, da 7 e da 9 litri, e la botte *vuota*, togliere 1 litro al fiascone da 9.

(Si compili un prospetto che faccia seguito a quello dell' Es. 4, come il terzo fa seguito al secondo).

6. — Si hanno tre fiasconi, da litri 20, 30, 40.

Il primo ed il terzo sono *pieni* di vino, ed il secondo è *vuoto*.

Senza adoperare altri recipienti, si vuol fare in modo che ogni fiascone contenga 20 litri di vino.

(Si faccia il prospetto corrispondente alle indicazioni seguenti: riempire il secondo col primo e poi il primo col terzo).

7. — Coi dati dell'Es. 6, si voglia invece far in modo che il secondo ed il terzo fiascone contengano 30 litri ciascuno.

(Si riempia il secondo fiascone col terzo e si travasi il primo nel terzo).

8. — Misurare 7 litri di vino, con due fiasconi *vuoti*, da 9 e da 11.

(In parole, il procedimento è lo stesso di quello usato nell'Es. 1. Si compili il prospetto corrispondente).

9. — Misurare 7 litri di vino, con due fiasconi *pieni*, da 9 e da 11, e la botte *vuota*.

(Si faccia un prospetto analogo al secondo).

10. — Misurare 5 litri di vino, coi dati dell'Es. 8.

(Si prepari un prospetto che faccia seguito a quello dell'Es. 7, come il terzo fa seguito al secondo. E così si continui poi, per risolvere gli Es. seguenti).

11. — Misurare 3 litri di vino, coi dati dell'Es. 8.

12. — Misurare 1 litro di vino, coi dati dell'Es. 8.

13. — Con due fiasconi *pieni*, da 9 e da 11 litri, e la botte *vuota*, togliere 1 litro al fiascone da 11.

(Si interpreti questo prospetto, che incomincia con la soluzione dell'Es. precedente.)

9	11	botte
1	11	8
1	0	19
0	1	19
9	1	10
0	10	10

CAPITOLO V

MOLTIPLICAZIONE

§ 1. — Prodotto di due numeri

1. — Giulietta sta giocando con 5 palline bianche, 5 rosse e 5 verdi.

Le domandiamo: quante, in tutto?

Giulietta *pensa*:

5 più 5 fa 10, più 5 fa 15

e *scrive*:

$$5 + 5 + 5 = 15.$$

2. — Possiamo insegnarle a *scrivere* più brevemente

$$5 \times 3 = 15.$$

3. — Ogni *somma* di numeri *eguali* si può indicare in forma di *prodotto*.

Il *moltiplicando* è *uno* di tali addendi ed il *moltiplicatore* è il loro *numero*.

4. — Domandiamo a Luigino di *indicare* quante lire alla settimana riceva un operaio, pagato a L. 15 il giorno (di lavoro).

Ed egli *scrive*:

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15.$$

Domandiamogli di *indicare* questa somma in modo abbreviato.

Egli (che è stato attento a quanto abbiamo insegnato a Giulietta) *scrive*:

$$15 \times 6$$

5. — Ora gli domandiamo: quanto fa?

Non aspettatevi che egli faccia come fareste voi, perchè ancora egli non sa *moltiplicare*.

Per lui, il *prodotto* è soltanto una *nuova scrittura* abbreviata.

6. — Or dunque, egli *pensa*:

15 più 15 fa 30, più 15 fa 45, più 15 fa 60,
più 15 fa 75, più 15 fa 90.

E completa l'eguaglianza così:

$$15 \times 6 = 90.$$

7. — Frattanto, Giulietta, che aveva 5 scatolette, si è divertita a mettere in ciascuna: una pallina bianca, una rossa ed una verde.

Quante palline in ogni scatola? 3.

8. — Domandiamo a Luigino di calcolare nuovamente quante siano in tutto le palline.

Egli *pensa*:

3 più 3 fa 6, più 3 fa 9, più 3 fa 12, più 3 fa 15.

Ma, invece di

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

egli *scrive*:

$$3 \times 5 = 15$$

9. — Or dunque:

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

e similmente per altri due numeri qualunque.

10. — Si conclude che:
il prodotto di due numeri non cambia, cambiando l'ordine dei fattori.

Brevemente: *la moltiplicazione è commutativa.*

11. — Domandiamo a Luigino quanti soldi metterebbe da parte, a 2 soldi al giorno, in un mese di 31 giorni.

Egli *scrive*:

$$2 \times 31$$

ed incomincia a *pensare*:

2 più 2 fa 4, più 2 fa 6, . . .

Ma poi si pente e *scrive*:

$$2 \times 31 = 31 \times 2 = 31 + 31 = 62.$$

12. — Con lo scambio dei fattori, Luigino ha applicato la proprietà *commutativa* della *moltiplicazione*.

Si conclude che, nell'*eseguire* una *moltiplicazione*, mediante *addizione*, giova *adoperare* i due *fattori* in *ordine decrescente.*

13. — Affinchè il *prodotto* di due numeri naturali si

possa considerare quale *somma* di **numeri eguali al** ***moltiplicando***, occorre che il ***moltiplicatore*** (cioè: il numero degli addendi) sia almeno 2.

In altri termini: non abbiamo detto ancora che cosa significhi un ***prodotto***, allorchè il ***moltiplicatore*** è **1** o **0.**

14. — Invece, ad es., anche Giulietta sa che

$$1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

e

$$0 \times 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

15. — Quindi, affinchè valesse la proprietà ***commutativa*** anche in questi casi, fu ***stabilito*** che:

$$4 \times 1 = 4$$
$$4 \times 0 = 0$$

16. — E similmente, qualunque sia il ***moltiplicando.***

In particolare,

$$1 \times 1 = 1 \qquad\qquad 0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0 \qquad\qquad 0 \times 0 = 0$$

17. — Or dunque:

il ***prodotto*** di due numeri naturali, uno dei quali sia **1,** è eguale all'***altro.***

18. — Inoltre:

il ***prodotto*** di due numeri naturali, di cui uno (almeno) sia ***zero***, vale ***zero.***

19. — Viceversa:

il prodotto di due numeri naturali, entrambi diversi da zero, è un numero naturale, diverso da zero.

20. — Quanto valgono 3 biglietti da L. 10? da L. 100? da L. 1000?

Valgono, rispettivamente, lire:

$$10 \times 3 = 30$$
$$100 \times 3 = 300$$
$$1000 \times 3 = 3000$$

21. — Sicchè: per *moltiplicare* 10, o 100, o 1000, per un numero naturale (o viceversa), basta *scrivere*, alla *destra* di questo, *uno* 0, o *due* 0, o *tre* 0. [1]

22. — Quanto valgono 7 biglietti da mille (lire), 5 da cento, 8 da dieci e 3 da uno?

$$(1000 \times 7) + (100 \times 5) + (10 \times 8) + 3 =$$
$$= 7000 + 500 + 80 + 3 = 7583.$$

Inversamente, ad es.,

$$4962 = 4000 + 900 + 60 + 2$$

cioè: 4962 è la *somma* di 4 *migliaia*, di 9 *centinaia*, di 6 *diecine* e di 2 *unità*.

23. — Sicchè, mentre i romani componevano i numeri mediante *addizioni* e *sottrazioni*, noi li componiamo mediante *addizioni* e *moltiplicazioni*.

Però i romani, segnando *un trattino orizzontale* sopra ad un numero, lo *moltiplicavano* per *mille*.

24. — Allorchè *uno* dei due fattori è

2 3 4 5 . . .

il *prodotto* si dice

doppio, triplo, quadruplo, quintuplo, . . .

dell'*altro* fattore.

---

[1] Molti, per brevità, anzichè «scrivere alla destra», dicono «aggiungere». Ma, se gli si *aggiunge zero*, il numero non cambia.

25. — **Potete insegnare a Luigino e a Giulietta a** ***moltiplicare*** fra loro due numeri di *una cifra*, servendovi della tavola di moltiplicazione (detta *pitagorica*).

E, frattanto, potrete rispondere alle ***domande*** e poi **risolvere** i ***problemi***, eseguendo le ***moltiplicazioni*** come **siete abituati a fare.**

DOMANDE

1. — Che cosa significa 8 × 3 e quanto vale?

2. — Come si può indicare in altro modo, e quanto fa, la somma 7 + 7 + 7 + 7 + 7?

3. — Quanto fa (il prodotto di) 57 per 0? per 1? per 10? per 100? per 1000?

4. — In un km., quanti dm.? cm.? mm.?

5. — Quanti micron in un m.?
(Si rammenti che un mm. è 1000 micron).

6. — Quanti g. in un q.? in una t.?
Quanti mg. in un kg.?

7. — Quant'è il doppio di 9? il triplo di 8? il quadruplo di 7? il quintuplo di 6?

Problemi

1. — Di quanti secondi si compone un'ora?
(Ogni ***giorno*** si compone di 24 ***ore***. — Ogni ***ora*** si compone di 60 ***minuti*** primi. — Ogni ***minuto*** si compone di 60 minuti ***secondi***).

2. — Di quanti minuti si compone un giorno?

3. — Di quante ore si compone un anno?
(Dapprima si pensi all'anno comune di 365 giorni. L'anno bisestile, che ha un giorno di più, quante ore ha di più?).

4. — A quanti soldi equivale un biglietto da L. 5.

5. — A quanti denari equivale una Lst.?

6. — Quanti pollici in un yard?
(Si rammenti che un yard è 3 piedi e che un piede è 12 pollici).

7. — Quanto costano m. 6 di stoffa, a L. 27 il m.?

8. — Quanti km. fa un ciclista in 5 ore, a km. 24 all'ora?

9. — Quanto pesano hl. 17 di frumento, se un hl. pesa kg. 74?

10. — Vale più un q. di monete d'oro (a lire 3100 il kg.) o una t. di scudi d'argento (a lire 200 il kg.)?

11. — Quanto costano due pezze di panno, ciascuna delle quali costa Lst. 7.7.7.?
(Si moltiplichino per 2, separatamente, le sterline, gli scellini ed i denari. Se i denari risultassero più di 12, ecc.).

12. — Quanto costano 11 tagli d'abito, a scellini 19.2 (scellini 19 e denari 2) il taglio?

13. — Per giungere sino a noi, la luce solare impiega circa 8 minuti e 14 secondi.
Qual è la distanza della Terra dal Sole?
(Quanti secondi impiega la luce solare, per giungere sino a noi? La *velocità* della *luce* è 300·000 km. al secondo).

14. — A che distanza da noi è scoppiata una folgore, se ne abbiamo udito il tuono 7 secondi dopo di averne visto il lampo?
(La *velocità* della *luce* è così grande, che siamo costretti a trascurare il tempo che essa impiega a percorrere pochi km., cioè a fare i nostri calcoli come se vedessimo il lampo, nell'istante stesso in cui si produce. — La *velocità* del *suono*, nell'aria, è m. 340 al secondo. — Sicchè: la nostra distanza, dal luogo in cui è scoppiata la folgore, è tante volte m. 340 quanti sono stati i secondi di ritardo, del suono rispetto alla luce).

Moltiplicazioni a sorpresa

Quindici alunni eseguiscano contemporaneamente le seguenti quindici moltiplicazioni, una per ciascuno; poi, confrontino i prodotti.

1. 37037 × 3	2. 15873 × 7	3. 10101 × 11
4. 8547 × 13	5. 5291 × 21	6. 3367 × 33
7. 3003 × 37	8. 2849 × 39	9. 1443 × 77
10. 1221 × 91	11. 1001 × 111	12. 777 × 143

13. 481×231 14. 429×259 15. 407×273

16. 13717421×9 17. 1097393690×9

18. 12345679×9 19. 15015015×37

20. — Il numero 12345679 è composto di otto cifre tra loro diverse. Moltiplicandolo per uno qualunque dei numeri

2 4 5 7 8

si ottiene un numero pure composto di otto cifre tra loro diverse

21. — Ciascuno dei numeri

10638 10647 10836

è composto di cinque cifre tra loro diverse. Moltiplicandone uno qualunque per 9, si ottiene un numero composto con le altre cinque cifre.

§ 2. — Prodotto di parecchi numeri

1. — Andrea ha ricevuto da una fabbrica 8 casse di fazzoletti.

Ogni cassa contiene 20 scatole.

Ogni scatola contiene 12 fazzoletti.

Quanti fazzoletti ha ricevuto?

2. — Ogni cassa ne contiene 12×20, cioè 240.

Perciò i fazzoletti ricevuti da Andrea sono 240×8, cioè 1920.

Le operazioni eseguite si possono indicare così:

$$12 \times 20 \times 8 = 240 \times 8 = 1920.$$

Così, mediante *due moltiplicazioni successive*, abbiamo calcolato un *prodotto di tre numeri*.

3. — I fazzoletti ricevuti da Andrea hanno gli orli di 8 colori diversi: un colore per cassa.

Volendo mandare ad alcuni suoi rivenditori una scatola per colore, Andrea ha sùbito pensato che

$$20 \times 8 = 8 \times 20.$$

Perciò egli ha fatto preparare dal falegname 20 cassette, ognuna delle quali contenga 8 scatole.

4. — Ora, Andrea prende una scatola da ciascuna cassa ricevuta e, con le 8 scatole, riempie una delle cassette che ha fatto preparare.

Quanti fazzoletti nella cassetta?

$$12 \times 8 = 96$$

5. — Le cassette sono 20 ed ognuna contiene 96 fazzoletti.

Quanti in tutto?

$$96 \times 20 = 1920$$

cioè *tanti, quanti* ne aveva ricevuto.

6. — In questo secondo modo, le operazioni eseguite si possono indicare così:

$$12 \times 8 \times 20 = 96 \times 20 = 1920.$$

Dal confronto dei due modi, risulta che:

$$12 \times 20 \times 8 = 12 \times 8 \times 20.$$

7. — Abbiamo cambiato l'*ordine* dei nostri tre fattori, ma il *prodotto finale* non è cambiato.

Vi ho indicato 2 dei 6 ordinamenti possibili di quei 3 fattori.

Indicate gli altri. Eseguendo le moltiplicazioni, troverete sempre lo stesso prodotto finale.

8. — Ciò accadrebbe anche se si trattasse di *altri numeri*.

Ed anche se i *fattori* fossero *più di tre*.

9. — Si conclude che:
il prodotto di quanti si vogliano numeri non cambia, cambiando l'ordine dei fattori.

Brevemente:
la ***moltiplicazione*** (anche di parecchi numeri) è ***commutativa.***

10. — In altro modo ancora:
Andrea ha ricevuto 20×8 scatole, cioè 160.
Ogni scatola contiene 12 fazzoletti.
Quindi, i fazzoletti sono 12×160, cioè 1920.

11. — Le operazioni, ora eseguite, si possono indicare così:

$$12 \times (20 \times 8) = 12 \times 160 = 1920.$$

E quelle, eseguite la prima volta, così:

$$(12 \times 20) \times 8 = 240 \times 8 = 1920.$$

Dal confronto, segue che:

$$(12 \times 20) \times 8 = 12 \times (20 \times 8).$$

12. — Sicchè: *dovendo moltiplicare parecchi numeri, questi si possono associare come si vuole* (e ciò senza variarne l'ordine).

Brevemente: la ***moltiplicazione*** è ***associativa.***

13. — Mentre *parecchi numeri* si possono *addizionare contemporaneamente*, invece, per calcolare un ***prodotto*** di *parecchi numeri*, bisogna eseguire ***parecchie moltiplicazioni*** *successive*, e precisamente:

2 per 3 fattori,
3 per 4 fattori, ecc.

Quante per 10 fattori?

Problemi

1. — Di quanti secondi si compone un giorno?

2. — Di quanti minuti si compone una settimana? di quanti secondi?

3. — Quanto costano 12 pezze di tela, di m. 48 ciascuna, a L. 9 il m.?

4. — A quanti denari equivalgono Lst. 13?

5. — Quanti pollici in 5 *yards*?

6. — Una cassa contiene 6 strati di scatole.
Ogni strato è composto di 8 file, di 5 scatole ciascuna.
Quante scatole nella cassa?
Se ogni scatola contiene una grossa (12 dozzine) di bottoni, quanti bottoni in quella cassa?

§ 3. — Somme, differenze e prodotti

1. — In una fabbrica lavorano 25 operai, 8 dei quali a L. 24 il giorno, gli altri a L. 20 il giorno.

Quanto viene speso in paghe, ogni settimana (di 6 giorni di lavoro)?

2. — Le lire dovute ai primi 8 operai sono: al giorno

$$24 \times 8 = 192$$

alla settimana

$$192 \times 6 = 1152.$$

Gli altri operai sono

$$25 - 8 = 17.$$

Le lire ad essi dovute sono: al giorno

$$20 \times 17 = 340$$

alla settimana

$$340 \times 6 = 2040.$$

Complessivamente, la paga settimanale è di lire

$$1152 + 2040 = 3192.$$

3. — In altro modo, le lire dovute a tutti gli operai sono:
al giorno

$$192 + 340 = 532$$

alla settimana

$$532 \times 6 = 3192.$$

4. — Nel primo modo, abbiamo eseguito le operazioni indicate dall'espressione:

$$(192 \times 6) + (340 \times 6).$$

Nel secondo modo, invece, abbiamo eseguito le operazioni indicate dall'espressione:

$$(192 + 340) \times 6.$$

Il ***risultato finale*** è ***lo stesso.***

Ma il secondo modo è più *rapido* (due operazioni, invece di tre).

5. — Abbiamo trovato che

$$(192 \times 6) + (340 \times 6) = (192 + 340) \times 6.$$

Nel ***primo membro*** di questa eguaglianza è indicata una ***somma*** di ***due prodotti***, aventi ***uno stesso moltiplicatore.***

Nel ***secondo membro*** è indicato il ***prodotto*** della ***somma dei moltiplicandi*** per il ***moltiplicatore comune.***

6. — Si accenna a questa *trasformazione* (passaggio

dal *primo* membro al *secondo*), dicendo che si è ***raccolto*** (o ***messo in evidenza***) *il fattore comune.*

7. — Si accenna alla ***trasformazione inversa*** (passaggio dal secondo membro al *primo*)

$$(192 + 340) \times 6 = (192 \times 6) + (340 \times 6),$$

dicendo che si è ***distribuito*** il ***moltiplicatore*** agli ***addendi*** del moltiplicando.

8. — Si conclude, brevemente, che:
la ***moltiplicazione*** è ***distributiva*** rispetto all'*addizione.*

9. — Un impiegato di banca riceve ogni mese L. 1200.
Egli vive in una pensione, che gli costa L. 700 al mese.
Quanto gli rimane, all'anno, per spese varie e risparmio?

10. — Ogni anno, egli riceve dalla banca L.

$$1200 \times 12$$

e paga alla pensione L.

$$700 \times 12$$

sicchè gliene rimangono

$$(1200 \times 12) - (700 \times 12) = 14400 - 8400 = 6000.$$

11. — Più rapidamente, gli rimangono:
ogni mese, L.

$$1200 - 700$$

ed ogni anno

$$(1200 - 700) \times 12 = 500 \times 12 = 6000.$$

12. — Dunque:

$$(1200 \times 12) - (700 \times 12) = (1200 - 700) \times 12.$$

Nel ***primo membro*** di questa eguaglianza è indicata una ***differenza*** di ***due prodotti***, aventi ***lo stesso moltiplicatore***.

Nel ***secondo membro*** è indicato il ***prodotto*** della ***differenza dei moltiplicandi*** per ***il moltiplicatore comune***.

13. — Si accenna a questa ***trasformazione***, dicendo che si è ***raccolto il fattore comune*** (il che permette di eseguire due operazioni, invece di tre).

14. — Si accenna alla ***trasformazione inversa***, dicendo che si è ***distribuito*** il ***moltiplicatore*** al ***sottraendo*** e al ***sottrattore***.

15. — Si conclude, brevemente, che:
la ***moltiplicazione*** è ***distributiva*** rispetto alla ***sottrazione***.

16. — La proprietà ***distributiva*** della ***moltiplicazione***, rispetto all'***addizione*** ed alla ***sottrazione***, si applica di frequente nel calcolo mentale (persino senza accorgersene), come risulta dagli Es. seguenti.

17. — D'ora in poi, per brevità di scrittura, ***prima*** o ***dopo*** di una ***parentesi***, il ***segno di moltiplicazione*** viene ***sottinteso***.

18. — Es. I.

$$70 + 20 = (7 \times 10) + (2 \times 10) = (7 + 2)\,10 = 9 \times 10 = 90$$
$$70 - 20 = (7 \times 10) - (2 \times 10) = (7 - 2)\,10 = 5 \times 10 = 50$$

Si può ***pensare***:

7 diecine + 2 diecine = 9 diecine
7 diecine — 2 diecine = 5 diecine.

Ma si *dice* immediatamente:

70 più 20 fa 90
70 meno 20 fa 50.

19. — L' Es. I (e gli analoghi) spiegano perchè ho voluto parlare della *moltiplicazione*, prima di proporre alcuni Es. nei quali, apparentemente, si tratta soltanto di *addizioni* o di *sottrazioni*.

20. — Es. II.

$$56 + 32 = (50 + 6) + (30 + 2) = (50 + 30) + (6 + 2) =$$
$$= 80 + 8 = 88$$

E si *dice*:

50 più 30 fa 80
6 più 2 fa 8
80 più 8 fa 88.

21. — Es. III.

$$56 - 32 = (50 + 6) - (30 + 2) = (50 - 30) + (6 - 2) =$$
$$= 20 + 4 = 24$$

E si *dice*:

50 meno 30 fa 20
6 meno 2 fa 4
20 più 4 fa 24.

22. — Del calcolo mentale, di somme come $47 + 28$ o di differenze come $75 - 38$, ci siamo già occupati nel Cap. IV.

Ed ora occupiamoci del calcolo mentale di *prodotti*.

23. — Es. IV.

$$23 \times 3 = (20 + 3)\,3 = (20 \times 3) + (3 \times 3) = 60 + 9 = 69$$

E si *dice*:

20 per 3 fa 60
3 per 3 fa 9
60 più 9 fa 69.

24. — Es. V.

$$49 \times 8 = (50 - 1)\,8 = (50 \times 8) - (1 \times 8) = 400 - 8 = 392$$

E si *dice*:

50 per 8 fa 400
1 per 8 fa 8
400 meno 8 fa 392.

25. — Quando dovete moltiplicare, ad es., 73 per 28, voi *scrivete*:

```
  73
  28
 ---
 584
146
----
2044
```

Gli è come se *pensaste*:

$$73 \times 28 = 73\,(20 + 8) = (73 \times 20) + (73 \times 8) =$$
$$= 1460 + 584 = 2044$$

Ma, nello *scritto*, i *prodotti parziali* si ordinano inversamente e si mettono in colonna, per addizionarli più comodamente: prima il 584 e poi il 1460, di cui non si scrive lo 0.

27. — Con un po' di esercizio, si riesce a *scrivere* il *prodotto finale* (di due numeri), senza scrivere i prodotti parziali.

Ad es.,

$$\begin{array}{r} 73 \\ 28 \\ \hline 2044 \end{array}$$

A tale scopo, *dico*:

3 per 8 fa 24, *scrivo* 4 e riporto 2,
7 per 8 fa 56, e 3 per 2 fa 6,
56 più 6 fa 62, più 2 (di riporto) fa 64,
scrivo 4 e riporto 6,
7 per 2 fa 14, più 6 (di riporto) fa 20, che *scrivo*.

Esercizi di calcolo mentale

1.	$(34 \times 6) + (16 \times 6)$	2.	$(48 \times 7) - (18 \times 7)$
3.	$500 + 300$	4.	$500 - 300$
5.	$957 + 42$	6.	$957 - 42$
7.	$63 + 29$	8.	$63 - 29$
9.	82×3	10.	89×9
11.	98×7	12.	199×15

13. $(57 \times 8) + (12 \times 8) - (19 \times 8)$

14. $(48 \times 7) - (31 \times 7) + (82 \times 7)$

Scrivere il prodotto (finale, senza i prodotti parziali):

15. 43×32 16. 56×41.

Problemi

1. — Quanto valgono 5 biglietti da mille (lire), 9 da cento, 7 da dieci e 2 da uno?

2. — Quanto valgono 4 biglietti da mille (lire), 8 da cinquecento, 7 da cento, 12 da cinquanta, 5 da venticinque, 38 da dieci, 32 da cinque, 15 da due e 4 da uno?

3. — Qual è il minimo numero di biglietti, occorrenti per pagare L. 43? L. 48? L. 92? L. 190? L. 636? L. 1580? L. 3525?

4. — Quanto vino conteneva una botte, se bastò a riempire 24 damigiane da l. 25 e 9 fiaschi da l. 2?

5. — Un negoziante ha comperato 12 casse di sapone, da 50 kg. ciascuna, a L. 4 il kg.

Ha dovuto pagare L. 7 di dazio, per ogni cassa, e L. 41 di trasporto, per tutte le casse.

Quanto ha speso, in tutto?

(Senza il trasporto, quanto ha speso per cassa? per tutte le casse?).

6. — Quante cifre (caratteri tipografici) occorrono per comporre tutti i numeri naturali da 1 a 100? (da 1 a 9? da 10 a 99? da 1 a 99?) da 1 a 1000? (da 1 a 99? da 100 a 999? da 1 a 999?).

7. — L'anno scorso, un negoziante ha guadagnato L. 24685.

Per sè e la famiglia, ha speso ogni mese L. 300 per l'alloggio e L. 1200 per il vitto.

Durante l'anno, ha notato soltanto di avere sborsato L. 200 per il medico, L. 62 per il farmacista, L. 1870 di vestiario, L. 850 di gas e luce elettrica e L. 55 di beneficenza.

Essendogli rimaste L. 1426, egli desidera sapere quale sia stato l'ammontare (cioè: la somma) delle piccole spese non annotate (sigarette, tram, caffè, teatri, ecc.).

(Per alloggio e vitto, quanto ha speso al mese? nell'anno?).

8. — Quant'è lungo un filare di 50 alberi, piantati ad intervalli successivi di 10 m.?

(Quanti sarebbero gli intervalli, se gli alberi fossero due, tre, ecc.?).

9. — Quant'è lunga una fila di 30 monete d'argento, a contatto, delle quali 19 da 5 lire (diametro mm. 37) e le altre da 2 lire (diametro mm. 27)?.

10. — Quanti denari sono Lst. 2.1.8?

(Le 2 sterline equivalgono a scellini ..., cui va aggiunto 1 scellino. I scellini così calcolati, equivalgono a denari ..., cui vanno aggiunti 8 denari).

11. — Quanti secondi sono in ore 1.23.20?

(Un'ora equivale a minuti ..., cui vanno aggiunti 23 minuti. — I minuti, così calcolati, equivalgono a secondi ..., cui vanno aggiunti 20 secondi).

12. — Un pollaiolo riceve da un pollicultore 14 ceste di polli vivi, ciascuna delle quali ne contiene 15, tranne una che ne contiene soltanto 2.

Accortosi di ciò, il pollaiolo pensa che quei polli avrebbero potuto esser messi in quelle ceste più comodamente, evitando di metterne 15 in una stessa cesta.

Ha ragione?

(Quante ceste contenevano 15 polli? quanti erano i polli? se in ogni cesta fossero stati messi 14 polli, quanti ve ne sarebbero stati? tutti? — In altro modo, togliendo un pollo da ogni cesta che ne conteneva 15, per metterlo nella cesta che ne conteneva 2, quanti ve ne sarebbero poi stati in questa?).

13. — Un tale ha giocato a carte 10 partite e ne ha vinto 3.

La posta essendo di 5 soldi, quanto ha dovuto pagare? (quante partite ha perduto? di queste, quante sono rimaste compensate da partite vinte e quante no? quante poste ha dovuto pagare? quanti soldi? quante lire?).

14. — Rodolfo aveva stabilito di vendere, a L. 3 il litro, l. 300 di vino di cui era piena una botte giuntagli dalle Puglie.

Dopo averne venduto così l. 120, egli ha riempito d'acqua la botte; però ha venduto il vino annacquato a L. 2 il litro.

Così facendo, quanto ha guadagnato più del previsto?

(Quante lire ha incassate con la vendita a L. 3 il l.? con quella a L. 2 il l.? in tutto? Quante aveva previsto di incassare? quante ne ha incassato più del previsto?

In altro modo: quanti litri di vino puro v'erano nel vino annacquato? a quanto aveva stabilito di vendere quello ed a quanto invece ha venduto questo?).

15. — A Milano, il *massimo* consumo di energia elettrica, per illuminazione stradale, avviene in *dicembre* (accensione alle ore 17, spegnimento di alcune lampade a mezzanotte e delle altre alle 7 e 22) ed il *minimo* in *giugno* (accensione alle ore 20 e 52, spegnimento di alcune lampade a mezzanotte e delle altre alle 3 ed 8).

Calcolare la durata mensile di accensione (nel dicembre e nel giugno, separatamente) di ciascuna lampada che viene spenta a mezzanotte e poi di ciascuna lampada che viene spenta al mattino.

Un vecchio avaro ed un servo infedele

1. — Un vecchio avaro teneva in un sacchetto 50 monete d'oro: 37 da lire 20 (diametro mm. 21), una da lire 10 (diametro mm. 19) e le altre da lire 5 (diametro mm. 17).

Ogni sera, le tirava fuori dal sacchetto alla rinfusa, compiacendosi di rimirarle: le contava e frattanto le metteva in fila, a contatto, misurando la lunghezza della fila, con un metro a nastro.

Quant'era lunga la fila ?

2. — Un servo, infedele e scaltro, avendo visto quello che il vecchio faceva, pensò di derubarlo, senza ch'egli se ne accorgesse.

Un mattino, destramente, tolse dal sacchetto una moneta da 20 lire ed una da 5 lire, ed in cambio ne mise due da 10 lire.

Il numero delle monete era cambiato ? (quante ne aveva tolte ? e quante ne aveva messe ?).

La lunghezza della fila era cambiata ? (quanti mm. era la somma dei diametri delle monete tolte ? delle monete messe al loro posto ?).

E così, il povero vecchio non si accorse di essere stato derubato. Di quanto ?

3. — Poichè il vecchio non sospettava di nulla, il servo ladro rinnovò la losca manovra ogni mattina, fino ad aver rubato tutte le monete da 5 lire.

Quant'erano allora quelle da 20 e quelle da 10 ?

4. — Ma una sera, il vecchio, accortosi che non v'erano più monetine da 5 lire, fece il conto del valore di tutte le monete, e trovò che era di lire ..., invece che di lire ...

Dunque, era stato derubato di lire ... (cioè: tante, quant'erano dapprima in monete da 5 lire).

Valutando ogni lira d'oro a 4 lire di carta, il danno era stato di L. ...

Il vecchio licenziò il servo ladro, ma trattenendogli due mensili da L. 120 l'uno.

CAPITOLO VI

DIVISIONE

§ 1. — Quoziente e resto

1. — Giulietta sta giocando coi soliti 39 sassolini.
Ne conta 7 e ne fa un mucchietto.
Ne conta altri 7 e ne fa un altro mucchietto.
E così continua, *sin che può.*

2. — Ad un certo punto, le rimangono soltanto 4 sassolini, che mette da parte.
Ora conta i mucchietti. Sono 5.
E va bene, perchè

$$(7 \times 5) + 4 = 35 + 4 = 39.$$

3. — Senza saperlo, Giulietta ha eseguito la ***divisione*** di 39 (***dividendo***) per 7 (***divisore***).

4. — Ciascuna delle operazioni di cui ci siamo occupati sin qui (addizione, sottrazione, moltiplicazione) dà *un risultato* (somma, differenza, prodotto).

Giulietta, invece, con una sola operazione (operando 39 ed operatore 7), ha trovato *due risultati*:

5 (numero dei mucchietti di 7 sassolini) e
4 (numero dei sassolini rimasti).

5. — Scriviamo:

$$q\ (39{,}7) = 5 \qquad \text{e} \qquad r\ (39{,}7) = 4$$

E leggiamo:

il ***quoziente*** di 39 per 7 è 5
il ***resto*** di 39 per 7 è 4.

6. — Per fare la ***prova*** della ***divisione*** bisogna fare *due operazioni successive*:

moltiplioare il divisore per il quoziente
ed aggiungere il resto.

Così facendo, si ritrova il *dividendo.*

7. — Ma ciò non basta.

Supponete che Giulietta avesse smesso, dopo aver fatto 4 mucchietti di 7 sassolini.

Gliene sarebbero rimasti

$$39 - (7 \times 4) = 39 - 28 = 11$$

e, facendo la prova,

$$(7 \times 4) + 11 = 28 + 11 = 39.$$

Basterebbe questo per concludere che il quoziente di 39 per 7 è 4? e che il resto è 11?

No, perchè 11 è *maggiore* di 7.

E quindi Giulietta non avrebbe fatto *tutti* i mucchietti (di 7 sassolini) che *poteva* fare.

8. — *Il resto dev'essere minore del divisore.*

9. — Mentre Giulietta ammucchia tutti i sassolini, entra Luigino.

Gli domandiamo se saprebbe trovare (senza adoperare i sassolini) quanti mucchietti di 7 si possano fare coi 39 che Giulietta sta ammucchiando.

10. — Luigino pensa:

fatto il primo mucchietto, ne resteranno

$$39 - 7 = 32$$

fatto il secondo, ne rimarranno

$$32 - 7 = 25$$

fatto il terzo, ve ne saranno ancora

$$25 - 7 = 18$$

fatto il quarto, ne rimarranno

$$18 - 7 = 11$$

e fatto il quinto, ne resteranno

$$11 - 7 = 4.$$

E risponde:

si possono fare 5 mucchietti (di 7 sassolini) e restano 4 sassolini.

11. — Si può eseguire una *divisione*, mediante *sottrazioni successive*, così:

dal *dividendo* si toglie il *divisore*, dalla *differenza* si toglie ancora il *divisore*, e così si continua *sin che è possibile*,

cioè sino ad ottenere una *differenza* che sia *minore* del *divisore*.

Il *quoziente* è il *numero delle sottrazioni* ed il *resto* è l'*ultima differenza*.

12. — Si cerchi il *quoziente* ed il *resto* di 5 per 0, alla maniera di Luigino.

Si pensa:

$$5 - 0 = 5$$

e poi

$$5 - 0 = 5$$

e poi . . . si smette: perchè si capisce che è inutile continuare.

13. — Nel caso del *divisore zero*, il procedimento delle *sottrazioni successive* non ha fine: non v'è dunque *quoziente* (numero delle sottrazioni), nè *resto* (ultima differenza).

14. — *In ogni divisione, il divisore dev' essere diverso da zero.*

15. — Chiarito ciò, ritorniamo al calcolo di Luigino.

Egli l'avrebbe eseguito più presto, imaginando già fatti tutti i mucchietti *possibili* (di 7 sassolini) senza saper *quanti*.

Poi con *addizioni successive* (più comode delle sottrazioni successive), avrebbe potuto pensare:

7 più 7 fa 14, più 7 fa 21, più 7 fa 28, più 7 fa 35.

E non avrebbe proseguito, perchè 35 più 7 fa 42, che è *maggiore* di 39.

16. — Il 35, trovato come *somma* di 5 addendi tutti eguali a 7, è dunque il *prodotto* di 7 per 5.

$$7 \times 5 = 35$$

Sicchè: il *quoziente* di due numeri (naturali) è *il massimo* numero (naturale) per il quale si possa *moltiplicare* il *divisore*, ottenendo un *prodotto* che non sia *maggiore* del *dividendo*.

Ed il *resto* è la *differenza* tra il *dividendo* e questo *prodotto*.

$$39 - 35 = 4$$

17. — Brevemente, voi dite:
7 in 39 sta 5 *volte*, col resto 4.

18. — Quante volte sta 8 in 3?
0 volte, col resto 3.

$$q\,(3{,}8) = 0 \qquad \text{e} \qquad r\,(3{,}8) = 3.$$

19. — Allorchè il *dividendo* è *minore* del *divisore*, il *quoziente* è *zero* ed il *resto* è uguale al *dividendo*.

20. — A quanti giorni, ore, minuti e secondi equivalgono 123.456 secondi?

Nella risposta, le *ore* devono essere meno di 24, i *minuti* ed i *secondi* devono essere meno di 60.

Divido 123.456 per 60 ed il resto dà i *secondi* domandati.

Divido il quoziente (minuti) per 60 ed il resto dà i *minuti* domandati.

Divido il quoziente (ore) per 24 ed il resto dà le *ore* domandate, mentre il quoziente dà i *giorni* domandati.

Scrivo:

123456	60		
345	2057	60	
456	257	34	24
36	17	10	1

Mentre scrivo *la prima divisione*, penso:
60 in 123 sta 2 (volte), col resto 3,
60 in 34 sta 0,
60 in 345 sta 5, col resto 45,
60 in 456 sta 7, col resto 36.

E mentre scrivo la *seconda*:
60 in 205 sta 3, col resto 25,
60 in 257 sta 4, col resto 17.

E mentre scrivo la *terza*:
24 in 34 sta 1, col resto 10.

Concludo che 123456 secondi equivalgono a giorni 1, ore 10, minuti 17 e secondi 36.

Esercizi di calcolo mentale

Dire il *quoziente* ed il *resto* di:

1.	50 per 7	2.	5 per 7
3.	75 per 9	4.	75 per 8
5.	29 per 6	6.	29 per 4
7.	100 per 11	8.	50 per 12

9. — Che numero bisogna dividere per 75, se si vuol ottenere 10 di quoziente e 27 di resto?
(Si supponga di aver eseguita la divisione e di volerne fare la prova).

10. — Per che numero bisogna dividere 500, se si vuol ottenere 15 di quoziente e 5 di resto?
(Si tolga il resto dal dividendo. La differenza ottenuta, divisa per il numero cercato, deve dare 15; sicchè, viceversa, divisa per 15, dà il numero cercato).

Problemi

1. — Quante camicie si possono fare con m. 35 di tela, adoperandone m. 3 per ciascuna?

2. — Quanti andirivieni deve fare un facchino per trasportare

30 casse da una fabbrica alla stazione, con un carretto a mano, che non gli consente di portarne più di 8 per volta?

3. — Andrea riceve l'ordine, da un suo cliente, di mandargli sùbito, in scatole da 12, tutte le (paia di) calze disponibili di una certa qualità.

Andrea ne ha 500.

Quante può mandarne al suo cliente?

(Quante scatole può riempire? quante calze gli rimangono? Dopo ciò, il numero cercato si può calcolare in due modi).

4. Andrea vuol rifornire il suo magazzino di calze di due qualità, da L. 6 e da L. 5, spendendo non più di L. 2950.

Poichè gliene occorrono 24 dozzine da L. 6, quante dozzine da L. 5 potrà comperare?

(Quanto costano le 24 dozzine da L. 6? Quante lire può spendere ancora? Quanto costa ogni dozzina da L. 5?)

5. — Rodolfo, il vinaio, ha comperato una botte che contiene l. 550 di vino, spendendo (fra costo, trasporto e dazio) L. 1251.

Lo travasa in damigiane da l. 24, vende le piene a L. 3 il litro (più il costo della damigiana) e si fa portare a casa l'ultima, non piena.

Quanto vino vende? e quanto guadagna (oltre alla botte ed al vino che berrà in famiglia), se la consegna delle damigiane gli costa L. 33?

6. — A quanti giorni, ore, minuti e secondi equivalgono 111·111 secondi?

7. — Cambiare 759 denari in sterline, scellini (meno di 20) e denari (meno di 12).

(Se si divide 759 per 240, che cosa indica il quoziente e che cosa bisogna poi fare del resto? Se, invece, si divide 759 per 12, che cosa indica il resto e che cosa bisogna poi fare del quoziente?)

8. — Quanto costano 5 pezze di panno, ciascuna delle quali costa Lst. 6·7·8?

(Quanti denari costa ogni pezza? si cambino le 6 sterline in scellini, si aggiungano i 7 scellini, si cambino tutti i scellini in denari e si aggiungano gli 8 denari. Quanti denari costano le 5 pezze? Poi, si cambino i denari in sterline, scellini e denari.

In altro modo, si moltiplichino per 5 gli 8 denari, e si cambino in scellini, da riportare, e denari: poi, si moltiplichino per 5 i 7

scellini, si aggiunga il riporto, e si cambino i scellini in sterline, da riportare, e scellini: in fine, si moltiplichino per 5 le 6 sterline, e si aggiunga il riporto).

§ 2. — Quoto

1. — Tre amici hanno pranzato insieme alla trattoria.
Il conto è di L. 45.
Poichè

$$q\,(45{,}3) = 15 \qquad \text{e} \qquad r\,(45{,}3) = 0$$

la *quota* (1) risulta di L. 15.

2. — Allorchè il *resto* è *zero*, il *quoziente* assume il nome di ***quoto.***
Ad es.,

il ***quoto*** di 45 per 3 è 15.

3. — Si scrive

$$45 : 3 = 15$$

e si **legge:**

45 *diviso* 3 fa 15.

4. — Scrivendo

$$45 : 3 = 15$$

gli è come se si scrivesse:

$$q\,(45{,}3) = 15 \qquad \text{e} \qquad r\,(45{,}3) = 0.$$

---

(1) In latino, «quota» era anche abbreviazione di «quota parte», cioè: *quanta parte.*
Invece, «quotiens» significa: *quante volte.*

5. — **Si dice che**

3 in 45 sta 15 volte, *esattamente*.

Qui, la parola

esattamente

è usata per dire:

con resto zero.

6. — Anche si dice che

45 è ***divisibile*** per 3.

Qui, dopo ***divisibile***, si sottintende *esattamente.*

7. — Un bottegaio riceve da una fabbrica 600 fazzoletti, in scatole che ne contengono uno stesso numero. Se le scatole sono 50, quanti fazzoletti vi sono in ogni scatola?

$$600 : 50 = 12$$

Inversamente: se in ogni scatola vi sono 12 fazzoletti, quante sono le scatole?

$$600 : 12 = 50$$

8. — Osservate che, in queste *due divisioni*, il ***dividendo*** è ***lo stesso***, ed invece il *divisore* ed il *quoto* sono ***scambiati.***

Tale *scambio* (fra il ***divisore*** ed il *quoto*) è sempre lecito (dopo aver eseguita una *divisione esatta*), quali che siano i numeri e le cose di cui ci si occupa.

9. — Si badi che, se la divisione non è esatta (cioè: se il ***resto*** è ***diverso da zero***), lo ***scambio*** fra il ***divisore***

ed il *quoziente* è lecito sol quando il *resto* è *minore* del *quoziente.*

Ad es., poichè

$$q\,(65{,}9) = 7 \qquad \text{e} \qquad r\,(65{,}9) = 2$$

in cui

2 è *minore* di 7,

si ha pure:

$$q\,(65{,}7) = 9 \qquad \text{e} \qquad r\,(65{,}7) = 2.$$

Invece, poichè

$$q\,(55{,}8) = 6 \qquad \text{e} \qquad r\,(55{,}8) = 7$$

in cui

7 *non è minore* di 6,

non è lecito lo *scambio* fra divisore e quoziente.

Infatti:

$$q\,(55{,}6) = 9 \qquad \text{e} \qquad r\,(55{,}6) = 1.$$

10. — Dunque:
in ogni *divisione esatta*, è lecito lo *scambio* fra l'*operatore* ed il *risultato.*

Anche la *sottrazione* ha questa proprietà.

11. — Ad es.,

da $6 : 2 = 3$ segue che $6 : 3 = 2$

come

da $9 - 4 = 5$ segue che $9 - 5 = 4$.

12. — Si devono spartire L. 8 fra 8 poveri.

Quante lire spettano a ciascuno?

$$8 : 8 = 1$$

13. — Allorchè si ***divide*** un ***numero*** (diverso da zero) per ***sè stesso***, il ***quoto*** è 1.

14.—Sovente, invece di ***uno***, gli scolari dicono ***zero***, mostrando di confondere la ***divisione*** con la ***sottrazione***. Il mio giovane lettore stia in guardia contro questa distrazione.

15. — Da $7 : 7 = 1$

segue che $7 : 1 = 7$

16. — Il ***quoto*** di due numeri, il ***secondo*** dei quali sia ***uno***, è eguale al ***primo***.

17. — Riassumendo:

ogni numero (naturale e diverso da zero) è ***divisibile*** per 1 e per *sè stesso*.

18. — Tre amici hanno messo insieme L. 2000 ciascuno, per comperare alcune merci, che hanno rivenduto per L. 6250.

Qual è la quota di guadagno, se, per trasporto e dazio, hanno speso inoltre L. 250?

Costo di quelle merci in lire, nel luogo d'acquisto:

$$2000 \times 3 = 6000$$

Loro costo nel luogo di vendita:

$$6000 + 250 = 6250$$

Guadagno:

$$6250 - 6250 = 0$$

Quota di guadagno:

$$0 : 3 = 0$$

19. — Se, il guadagno complessivo essendo di L. 0, il numero dei soci fosse stato diverso (ad es., 5 od 8 od altro), quale sarebbe stata la quota di guadagno?

Sempre 0.

20. — Allorchè si *divide* 0 per un *numero qualunque* (diverso da zero), il *quoto* è 0.

21. — Lo *zero* è *divisibile* per *ogni numero* (diverso da zero).

22. — Per formare 5000 lire, quanti biglietti occorrono da L. 10? da L. 100? da L. 1000?

Ne occorrono, rispettivamente:

$$5000 : 10 = 500$$
$$5000 : 100 = 50$$
$$5000 : 1000 = 5$$

23. — Sicchè: un numero naturale, che *termini* con *zeri*, si *divide* per 10, o per 100, o per 1000, *cancellando*, in quel numero, *uno* 0 finale, o *due* 0, o *tre* 0.

24. — Nelle *divisioni esatte*, aventi per *divisore*

2 3 4 5 . . .

si dice che il *quoto* è

la *metà*, un *terzo*, un *quarto*, un *quinto*, . . .
del *dividendo*.

Esercizi di calcolo mentale

Calcolare:

1.	91 : 7	2.	91 : 13	3.	92 : 4
4.	92 : 23	5.	93 : 3	6.	93 : 31
7.	94 : 2	8.	94 : 47	9.	95 : 5
10.	95 : 19	11.	96 : 6	12.	96 : 16
13.	97 : 97	14.	97 : 1	15.	0 : 97

16. — la metà di 50, un terzo di 75, un quarto di 100

DOMANDE

1. — A quanti metri equivalgono 840 decimetri?
2. — A quanti grammi equivalgono 840 decigrammi?
3. — A quanti litri equivalgono 840 decilitri?
4. — A quanti scellini equivalgono 840 denari?
5. — A quante sterline equivalgono 840 scellini?
6. — A quanti minuti equivalgono 840 secondi?
7. — A quante ore equivalgono 840 minuti?
8. — A quanti giorni equivalgono 840 ore?
9. — A quante settimane equivalgono 840 giorni?
10. — A quante lire equivalgono 840 soldi?
11. — In un metro, quanti dm.? cm.? mm.?
12. — In un grammo, quanti dg.? cg.? mg.?
13. — In un chilometro, quanti dam.? hm.?
14. — In una tonnellata, quanti q.?
15. — In 3000 mm., quanti m.? dm.? cm.?
16. — In 3000 mg., quanti g.? dg.? cg.?
17. — In 3000 m., quanti km.? hm.? dam.?
18. — In 3000 kg., quante t.? quanti q.? Mg.?
19. — In 3000 litri, quanti hl.?
20. — In 3000 soldi quante lire?
21. — Qual è la lunghezza (in km.) di un meridiano terrestre? (*Si rammenti che il* metro campione *fu costruito con l'intenzione che fosse la* decimilionesima *parte di un* quarto *di meridiano terrestre*).

22. — La distanza della Luna dalla Terra è poco meno di km. 400·000. Quante volte la lunghezza di un meridiano terrestre?

Problemi

1. — Tre amici devono dividersi L. 18. Quanto spetta a ciascuno?

2. — Quattro amici devono dividersi L. 18. Quanto a ciascuno? (Si supponga che abbiano 18 monete da una lira. Se ne distribuiscono una a ciascuno, una prima volta, una seconda volta, ecc., fin che è possibile. Quante volte? Quante lire restano? Essi le cambiano in monete da 50 centesimi. Quante in tutto? a ciascuno? Quante lire e quanti centesimi ha avuto ciascuno?)

3. — Sette amici devono dividersi L. 18. Quanto a ciascuno? (Fin che è possibile, si distribuiscono una lira ciascuno. Quante volte? Quante lire rimangono? Le cambiano in monete da un soldo. Quante? Fin che è possibile, si distribuiscono un soldo ciascuno. Quante volte? Quanti soldi rimangono? Li dànno ad un povero. Quante lire e quanti soldi ha avuto ciascuno?)

4. — Due amici devono spartirsi una Lst.
Quanto (in scellini) a ciascuno?

5. — Tre amici devono dividersi una Lst.
Quanto (in scellini e denari) a ciascuno?

6. — Sette amici devono dividersi una Lst.
Quanto (in scellini e denari) a ciascuno?
Essi dànno ad un povero i denari che non possono dividersi. Quanti?

7. — Rodolfo, il vinaio, ha l. 225 di vino in una botte.
Con esso, egli riempie 3 damigiane da l. 25 (ciascuna) ed il vino rimanente mette in fiaschi da l. 2.
Quanti fiaschi riempie?

8. — Un treno accelerato parte da Milano alle 5 ed arriva a Torino (km. 150) alle 10.
Un treno diretto parte da Milano un'ora dopo ed arriva a Torino un'ora prima.
Qual'è la velocità media (in km. all'ora) dei due treni?

9. — A m. 1020 dal fucile, di quanto tempo il proiettile precede il rumore dello sparo?
(Si supponga che, per la distanza considerata, la velocità media

del proiettile sia di m. 510 al secondo. E si rammenti che la velocità di propagazione del suono, nell'aria, è di m. 340 al secondo).

10. — Alle 5 del mattino, esce dal porto di Spezia una corazzata, che percorre km. 40 all'ora.

Due ore dopo, viene fatta partire una torpediniera, che percorre 50 km. all'ora, allo scopo di raggiungere la corazzata ed imbarcarvi un ufficiale ch'era giunto da Roma in ritardo.

A che ora potrà rientrare nel porto la torpediniera, dopo aver compiuta la sua missione?

(Nel momento in cui la torpediniera è partita, a che distanza si trovava dalla corazzata? Di quanto diminuì tale distanza, in ogni ora successiva? Quante ore occorrono alla torpediniera per raggiungere la corazzata? per fare ritorno? per compiere il suo viaggio? A che ora era partita?)

11. — Di due ruote, d'un ingranaggio, una ha 12 denti e l'altra 48.

Quanti giri fa la ruota minore, mentre la maggiore fa un giro?

(Mentre la ruota minore fa un giro, i suoi 12 denti ne ingranano 12 dei 48 della maggiore).

12. — Si vuol costruire una ruota dentata che, ingranandone una di 36 denti, faccia 3 giri ad ogni giro di quella.

Quanti denti deve avere la nuova ruota?

E se invece questa dovesse fare un giro, ad ogni 3 giri di quella?

13. — Un orologio, regolato al mezzogiorno di domenica, segnava le 11 e 58 al mezzogiorno del venerdì seguente.

Qual è stato il ritardo giornaliero?

(Di quanti minuti il ritardo complessivo? di quanti secondi? in quanti giorni?).

14. — Un cane insegue una lepre, percorrendo m. 8 al secondo, mentre quella ne percorre soltanto 5.

Ora distano m. 60.

Fra quanti secondi la lepre sarà raggiunta?

(In ogni secondo, di quanto diminuisce la distanza fra la lepre e il cane?).

15. — Un diretto, che fa 60 km. all'ora, ed un accelerato, che ne fa 40, partono contemporaneamente da Savona: l'uno per Genova e l'altro per San Remo.

Dopo quanti secondi si troveranno alla distanza (ferroviaria) di 1 km.?

(Dopo un'ora a che distanza sarebbero? a quanti secondi equivale un'ora?).

16. — Un tale morendo lascia L. 140000, da spartire tra 2 figli e 3 figlie: in modo che la parte di ogni maschio sia doppia di quella di ogni femmina.

Quanto spetta a ciascuno?

(Mentre ogni figlia preleva una lira, quanto preleva ogni figlio? così facendo, quante lire si spartiscono? quante volte possono fare così?).

17. — Un diretto parte da Voghera alle 12.38 e, senza alcuna fermata, arriva a Milano alle 13.40.

Un altro diretto parte da Pavia alle 12·39 e, senza alcuna fermata, arriva a Voghera alle 13.06.

Le distanze progressive, in km. da Genova, sono: Voghera 89, Lungavilla 98, Bressana 103, Cava Manara 110, Pavia 116, Milano 151.

A che ora e dove incrociano i due treni?

(Da Voghera a Milano, quanti km. percorre il primo ed in quanti minuti? Quanti km. al minuto percorre il primo treno? il secondo? Alle 12·39 di quanti km. distano fra loro? In ogni minuto successivo, di quanto si avvicinano? Dopo quanti minuti incrociano? a che ora? a che distanza da Pavia? da Genova? dove?)

18. — Il primo di ottobre un negoziante di buoi, ne possiede 23 e tanto fieno quanto occorre per nutrirli sino alla fine di novembre.

Ma prima egli vende 8 buoi e li consegna la sera del 16 ottobre.

Il 31 ottobre, trovandosi al mercato, gli si presenta l'opportunità di comprarne, a prezzo minore, da farsi consegnare la sera stessa.

Egli sta riflettendo a quanti buoi possa comperare, poichè altro fieno gli verrà consegnato soltanto il mattino del primo di dicembre.

(Il giovane lettore potrebbe credere di dover calcolare il numero delle razioni di fieno che quel negoziante possedeva il mattino del primo ottobre, e di quelle che gli erano rimaste la sera dei 16 e poi del 31.

Il negoziante, invece, pensa semplicemente, ch'egli può comprare tanti buoi quanti ne aveva venduti ed inoltre tanti quanti egli potrà nutrire in novembre col fieno che i buoi venduti avrebbero mangiato dalla sera del 16 ottobre a quella del 31).

§ 3. — Prodotti e quoti

1. — Tre amici devono spartirsi L. 111.

Si pensa:

3 in 11 sta 3 volte, con resto 2,
3 in 21 sta 7 volte, esattamente.

Si conclude che a ciascuno spettano lire

$$111 : 3 = 37$$

Infatti,

$$37 \times 3 = 111.$$

2. — In ogni *divisione esatta*, il *prodotto* del *quoto* per il *divisore* dev'essere eguale al *dividendo*.

Infatti, per fare la *prova* di una tale divisione, al detto prodotto si dovrebbe *aggiungere* il *resto*.

Ma quest'*addizione* è superflua, nel caso della *divisione esatta*, cioè quando il *resto* è *zero*.

3. — Dunque: allorchè un numero (naturale) è *divisibile* per un altro, il loro *quoto* è il numero per il quale bisogna *moltiplicare* il *secondo*, per ottenere il *primo*.

4. — Poichè

$$37 \times 3 = 111,$$

invece di

$$111 : 3 = 37$$

si può scrivere:

$$(37 \times 3) : 3 = 37.$$

5. — Si conclude che:

se un *primo* numero (ad es., 37) si ***moltiplica*** per un *secondo* numero (ad es., 3) e poi si ***divide*** il prodotto ottenuto (cioè 111) per il *secondo* numero (cioè 3), si ritrova il *primo* numero (cioè 37).

6. — Brevemente:

la *divisione* è ***inversa*** della *moltiplicazione.*

(Come la *sottrazione* è *inversa* dell'*addizione*).

7. — Perciò, dovendo calcolare il valore dell'espressione

$$(987 \times 654) : 654$$

basta accorgersi che si deve *moltiplicare* e *dividere* (successivamente) per uno *stesso numero*, per risparmiare ogni fatica e scriver subito, come *risultato finale*, il *primo fattore.*

Sicchè, immediatamente:

$$(987 \times 654) : 654 = 987$$

8. — Poichè

$$111 : 3 = 37,$$

invece di

$$37 \times 3 = 111$$

si può scrivere:

$$(111 : 3)\, 3 = 111.$$

9. — Si conclude che:

se un *primo* numero (ad es. 111) si *divide* per un *secondo* numero (per il quale il primo sia ***divisibile***, ad es. 3) e poi il *quoto* ottenuto (cioè 37) si ***moltiplica*** per

il *secondo* numero (cioè 3), si ritrova il *primo* numero (cioè 111).

10. — Brevemente:

la *moltiplicazione* è *inversa* della *divisione esatta.*

(Come l'*addizione* è *inversa* della *sottrazione*).

11. — Per quanto sappiamo, ad es.,

$$(357 \times 468) : 468 = 357$$

Ma (per la proprietà *commutativa* della *moltiplicazione*) invece di

$$357 \times 468$$

possiamo scrivere

$$468 \times 357$$

ottenendo:

$$(468 \times 357) : 468 = 357$$

cioè: se il *prodotto* di due numeri si divide per il *primo*, si ritrova il *secondo.*

12. — Riassumendo:

se il prodotto di due numeri si divide per uno di essi, si ritrova l'altro.

13. — Se un treno percorre 120 km. in 2 ore, la sua velocità media (in km. all'ora) è

$$120 : 2 = 60$$

Se un altro treno percorre una distanza *tripla* in un tempo *triplo*, la sua velocità media è

$$(120 \times 3) : (2 \times 3) = 360 : 6 = 60$$

I due treni hanno la *stessa* velocità media.

14. — Che cosa ci insegna questo fatto?
Che

$$(120 \times 3) : (60 \times 3) = 120 : 60$$

cioè che: ***in ogni quoto indicato, è lecito moltiplicare per uno stesso numero, il dividendo e il divisore.***

15. — Ad es., dovendo ***dividere*** un numero (naturale) per 5, giova dividere il ***doppio*** di quel numero per il ***doppio*** di 5, cioè per 10.
Ad es.,

$$12345 : 5 = 24690 : 10 = 2469.$$

16. — Istessamente, dovendo ***dividere*** un numero (naturale) per 50 o per 500, giova dividere il ***doppio*** di quel numero per il ***doppio*** di 50 o di 500, cioè per 100 o per 1000.
Ad es.,

$$23450 : 50 = 46900 : 100 = 469$$
$$34500 : 500 = 69000 : 1000 = 69$$

17. — Analogamente, dovendo ***dividere*** un numero (naturale) per 25 (o per 125), giova ***moltiplicare*** per 4 (o per 8) il ***dividendo*** ed il ***divisore.***
Ad es.,

$$31975 : 25 = (31975 \times 4) : (25 \times 4) = 127900 : 100 = 1279$$
$$24625 : 125 = (24625 \times 8) : (125 \times 8) =$$
$$= 197000 : 1000 = 197$$

18. — Inversamente:
in ogni quoto indicato, è lecito dividere per uno stesso numero il dividendo ed il divisore,
purchè entrambi siano ***divisibili*** per quel numero.

19. — Ad es., dovendo calcolare il quoto

$$714000 : 21000$$

lo ***semplifico*** per 1000 (cioè: ne *divido* per 1000 tanto il *dividendo*, quanto il *divisore*) ed ottengo:

$$714 : 21$$

Semplifico per 7 ed ottengo

$$102 : 3$$

Eseguisco (3 in 10 sta 3 volte, con resto 1; 3 in 12 sta 4, esattamente) ed ottengo 34.

$$714000 : 21000 = 34$$

(La *semplificazione* dei *quoti*, mediante *divisioni*, è analoga a quella delle *differenze*, mediante *sottrazioni*).

20. — Tre muratori hanno fatto un lavoro in 5 giorni, ricevendo (insieme) L. 105 al giorno.

Quanto ha avuto ciascuno, in tutto?

21. — *Prima risoluzione.* — Ciascuno dei tre muratori ha avuto:

ogni giorno, L. $105 : 3$

in tutto, L. $(105 : 3)\, 5 = 35 \times 5 = 175.$

22. — *Seconda risoluzione.* — In tutto, i tre muratori hanno avuto:

insieme, L. 105×5

ciascuno, L. $(105 \times 5) : 3 = 525 : 3 = 175.$

23. — Dal confronto, risulta che

$$(105 : 3)\, 5 = (105 \times 5) : 3$$

24. — Quindi:

allorchè su un numero si devono eseguire successivamente una divisione ed una moltiplicazione, è lecito invertire l'ordine di esecuzione delle due operazioni.

25. — Anche se si devono eseguire successivamente una *moltiplicazione* ed una *divisione*, la *inversione* nell'ordine delle due operazioni non ne altera il *risultato finale*: purchè tale *inversione* non impedisca di *eseguire* la divisione, come accade nell'es. seguente.

26. — Un'altra volta, quei tre muratori hanno fatto un lavoro in 6 giorni, ricevendo (insieme) L. 100 al giorno.

Quanto ha avuto ciascuno, in tutto?

27. — Ragionando come l'altra volta, le lire avute da ciascuno, in tutto, si possono *indicare* in due modi:

$$(100 : 3)\,6$$

e

$$(100 \times 6) : 3$$

Ma nell'*esecuzione*, il primo modo è da abbandonare, perchè 100 non è divisibile per 3. Invece, nel secondo:

$$(100 \times 6) : 3 = 600 : 3 = 200.$$

28. — Ecco un caso in cui la inversione è possibile ed utile:

$$(32 \times 21) : 8 = (32 : 8)\,21 = 4 \times 21 = 84$$

29. — Scambiando fra loro i due fattori di ciascun prodotto:

$$(21 \times 32) : 8 = 21\,(32 : 8) = 21 \times 4 = 84$$

30. — Segue che (ove lo si possa):

per *dividere* un *prodotto* per un numero, basta *dividere* per esso *uno dei fattori.*

31. — La trasformazione inversa

$$21(32 : 8) = (21 \times 32) : 8$$

che sarebbe incomoda con questi numeri, può riuscire vantaggiosa con altri numeri.

Ad es.,

$$8647(10 : 2) = (8647 \times 10) : 2$$

32. — Risulta, in generale, che:

per *moltiplicare* un *numero* per un *quoto* (od un *quoto* per un *numero*), basta *moltiplicare* (per quel numero) il *dividendo*;

ed, in particolare, che:

dovendo *moltiplicare* un numero (naturale) per **5**, basta *moltiplicarlo* per 10, e poi *dividere* per 2.

33. — Istessamente:

per *moltiplicare* un numero (naturale) per 50 o per 500, basta *moltiplicarlo* per 100 o per 1000, e poi *dividere* per 2.

Ad es.,

$$248 \times 50 = 24800 : 2 = 12400$$
$$8264 \times 500 = 8264000 : 2 = 4132000$$

34. — Analogamente:

per moltiplicare un numero (naturale) per 25, basta moltiplicarlo per 100, e poi dividere per 4.

Ad es.,

$$72 \times 25 = 7200 : 4 = 1800$$

35. — Allorchè si devono eseguire *successivamente* parecchie *moltiplicazioni* e *divisioni*, giova dare la *precedenza* alle *divisioni* (ove lo si possa con *divisioni esatte*), per operare con numeri minori.

Ad es.,

$$[(56 \times 21) : 14] : 12 = [(56 : 14) 21] : 12 = (4 \times 21) : 12$$

da cui (semplificando per 4)

$$21 : 3 = 7$$

36. — Si osservi che, oltre alle solite *parentesi curve* ( ), ho adoperato le *parentesi quadre* [ ].

Ove occorra, si adoperano anche le *graffe* { }.

37. — Un'altra volta ancora, quei tre muratori hanno fatto un lavoro in 5 giorni, ricevendo (in tutto, insieme) L. 570.

Quanto al giorno, ciascuno?

38. — *Prima risoluzione.* — Ciascuno dei tre muratori ha ricevuto:

in 5 giorni, L. $570 : 3$

ogni giorno, L. $(570 : 3) : 5 = 190 : 5 = 38.$

39. — *Seconda risoluzione.* — Ogni giorno, i tre muratori hanno avuto:

insieme, L. $570 : 5$

ciascuno, L. $(570 : 5) : 3 = 114 : 3 = 38.$

40. — *Terza risoluzione.* — Le giornate (individuali) di lavoro sono state

$$3 \times 5$$

e quindi la paga giornaliera è stata di L.

$$570 : (3 \times 5) = 570 : 15 = 38.$$

41. — Dal confronto delle prime due risoluzioni, risulta che:

$$(570 : 3) : 5 = (570 : 5) : 3$$

Sicchè: anche ***divisioni*** (esatte) ***successive*** si possono *alternare* fra loro.

(Come già si è visto per le ***sottrazioni***).

42. — Inoltre, dal confronto delle risoluzioni prima e terza, risulta che:

allorchè un numero si deve dividere successivamente per parecchi numeri, lo si può invece dividere per il loro prodotto.

43. — Inversamente:

dovendo dividere un numero per un prodotto, si può invece dividerlo successivamente per i singoli fattori.

44. — Ad es., dovendo dividere 15408 per 48, penso che

$$6 \times 8 = 48$$

e perciò divido successivamente 15408 per 6 (ottenendo 2568) e poi per 8 (ottenendo 321).

Sicchè:

$$15408 : 48 = 321$$

Si faccia la verifica, dividendo prima per 8 e poi per 6.

45. — Due operai costruiscono in 7 giorni 35 barili, ricevendo il legno occorrente e L. 18 il barile, quale compenso del lavoro.

A quanto il giorno è pagato ciascuno di essi?

46. — *Prima risoluzione.* — Essi ricevono L.

$$18 \times 35$$

quale compenso di $\quad 2 \times 7$

giornate (individuali) di lavoro.

Quindi, la paga giornaliera di ciascuno è di lire

$$(18 \times 35) : (2 \times 7) = 630 : 14 = 45.$$

47. — *Seconda risoluzione.* — Più rapidamente, è come se ciascuno ricevesse lire 18 : 2 per barile e che ogni giorno facessero 35 : 7 barili.

Quindi la paga giornaliera di ciascuno è di lire

$$(18 : 2)(35 : 7) = 9 \times 5 = 45.$$

48. — Dal confronto, risulta che

$$(18 : 2)(35 : 7) = (18 \times 35) : (2 \times 7)$$

cioè: *il prodotto di due quoti è eguale al quoto del prodotto dei dividendi e del prodotto dei divisori*

(come *la somma di due differenze è eguale alla differenza tra la somma dei sottraendi e la somma dei sottrattori*).

DOMANDE

1. — Se il prodotto

$$123 \times 456$$

viene diviso per 123, che cosa risulta?

E se, invece, viene diviso per 456?

2. — Quanti biglietti da L. 5 occorrono per pagare L. 4215?

3. — Quanti biglietti da L. 50 occorrono per pagare L. 24250?

4. — Quanti biglietti da L. 500 occorrono per pagare L. 313500?

5. — Quanti biglietti da L. 25 occorrono per pagare L. 22225?

6. — Si fa più presto a calcolare

$$(46 \times 45) : 23$$

ovvero

$$(46 : 23)\ 45\ ?$$

7. — *Come giova trasformare ciascuna delle espressioni*

$$(98 \times 45) : 49$$
$$(63 \times 22) : 21$$
$$(25 \times 84) : 21\ ?$$

8. — *Sapreste calcolare mentalmente*

$$4815 : 15$$

raddoppiando il dividendo e il divisore ?

9. — *Preferite calcolare*

$$(35 \times 14) : 2$$

ovvero

$$35\ (14 : 2)\ ?$$

10. — *Preferite calcolare*

$$(24 \times 31) : 8$$

ovvero

$$(24 : 8)\ 31\ ?$$

11. — *Quanto valgono 864 biglietti da L. 5 ? da L. 50 ? da L. 500 ? da L. 25 ?*

12. — *Preferite calcolare*

$$(777 : 3) : 7$$

ovvero

$$(777 : 7) : 3\ ?$$

13. — *Preferite calcolare*

$$(33683 : 37) : 3$$

ovvero

$$33633 : (37 \times 3)\ ?$$

14. — *Preferite calcolare*

$$1863 : (9 \times 3)$$

ovvero

$$(1863 : 9) : 3 ?$$

15. — *Preferite calcolare*

$$(56 \times 63) : (8 \times 9)$$

ovvero

$$(56 : 8) (63 : 9) ?$$

Problemi

1. — Di due ruote, ingranate fra loro, una ha 72 denti e l'altra 12.
Le due ruote vengono scostate, per inserire una ruota di 24 denti, che ingrani separatamente con esse.

Così facendo, si è alterato il numero dei giri che la ruota minore fa, ad ogni giro della maggiore?

(Ad ogni giro della maggiore, quanti giri fa l'intermedia? e ad ogni giro di questa, quanti giri fa la minore? perciò: ad ogni giro della ruota maggiore, quanti giri fa la ruota minore? e quanti ne faceva?).

2. — Su uno stesso asse, sono saldate due ruote dentate: una di 16 denti e l'altra di 40.

Ad ogni giro d'una ruota di 96 denti, che ingrana quella di 16, quanti giri fa una ruota di 10 denti, che ingrana quella di 40?

(Ad ogni giro della maggiore, quanti giri fa l'asse su cui sono saldate le prime due ruote? e ad ogni giro di quest'asse, quanti giri fa la ruota minore?).

3. — Di due ruote d'un ingranaggio, una ha 48 denti e l'altra 64.

Quanti giri fa la minore, mentre la maggiore ne fa 3?

Quanti giri fa la maggiore, mentre la minore ne fa 100?

(Quanti denti ingranano, mentre la ruota maggiore fa 3 giri? e perciò, frattanto, quanti giri fa la minore? Quanti denti ingranano, mentre la minore fa 100 giri? e perciò, frattanto, quanti giri fa la maggiore?).

§ 4. — Somme, differenze e quoti

1. — Quanto al giorno ha avuto (in media) un operaio che, alla fine di 6 giorni, ha ricevuto L. 126 di paga e L. 24 per lavoro straordinario?

2. — La paga giornaliera (per un certo numero pattuito di ore di lavoro) è stata di lire

$$126 : 6 = 21$$

ed il compenso per il lavoro straordinario (cioè eseguito oltre l'orario fissato), ripartito un tanto al giorno, è stato (in media) di lire

$$24 : 6 = 4.$$

Sicchè, al giorno, egli ha avuto, quale *media complessiva* lire

$$21 + 4 = 25.$$

3. — In altro modo, nei 6 giorni, egli ha avuto lire

$$126 + 24 = 150$$

e quindi, al giorno, lire

$$150 : 6 = 25.$$

4. — Il secondo modo è più *rapido* (due operazioni invece di tre).

Ma, intanto, dal confronto dei due modi risulta che

$$(126 : 6) + (24 : 6) = (126 + 24) : 6.$$

5. — Nel *primo membro* di questa eguaglianza è indicata una *somma* di due *quoti*, aventi uno *stesso divisore*.

Nel *secondo membro*, invece, è indicato *il quoto* della *somma dei dividendi* per il *divisore comune.*

6. — Si accenna a questa *trasformazione* (passaggio dal *primo* membro al *secondo*), dicendo che si è *raccolto* (o *messo in evidenza*) *il divisore comune.*

7. — Nel febbraio, d'un anno bisestile, un impiegato ha riscosso L. 899 di stipendio netto ed ha speso L. 812.

In media, quanto ha risparmiato al giorno?

8. — In media, ogni giorno, egli ha riscosso L.

$$899 : 29 = 31$$

ne ha spese

$$812 : 29 = 28$$

e ne ha risparmiate

$$31 - 28 = 3.$$

9. — Più rapidamente, egli ha risparmiato, nel mese, L.

$$899 - 812 = 87$$

e quindi, in media, ogni giorno

$$87 : 29 = 3.$$

10. — Dal confronto dei due modi, risulta che

$$(899 : 29) - (812 : 29) = (899 - 812) : 29.$$

Nel *primo membro* di questa eguaglianza è indicata una *differenza* di due *quoti*, aventi uno *stesso divisore*. Nel *secondo membro*, invece, è indicato il *quoto* della *differenza dei dividendi* per il *divisore comune*.

11. — Si accenna anche a questa *trasformazione* (passaggio dal *primo* membro al *secondo*), dicendo che si è *raccolto* (o *messo in evidenza*) il *divisore comune*.

12. — Tanto nel caso dell'*addizione* quanto in quello della *sottrazione*, si accenna alla *trasformazione inversa* (passaggio dal *secondo* membro al *primo*), dicendo che si è *distribuito* il *divisore* (agli *addendi* ovvero al *sottraendo* e al *sottrattore*).

13. — Il *raccogliere* un *divisore comune* non può mai recare inconvenienti: perchè, se le *divisioni parziali* sono *esatte*, anche la *divisione complessiva* è *esatta*.

14. — Abitualmente, il *raccogliere* un *divisore comune* giova a diminuire il numero delle operazioni.

Ad es.,

$$(294 : 7) + (161 : 7) = 455 : 7 = 65$$
$$(294 : 7) - (161 : 7) = 133 : 7 = 19$$

15. — Per contro, il *distribuire* un *divisore* giova sol quando le *divisioni parziali* riescono *esatte* (il che non sempre accade) e di *pronta esecuzione.*

16. — Ad es., dovendo calcolare

$$(41 + 4) : 5$$

si farà subito

$$45 : 5 = 9$$

perchè nè 41 nè 4 sono *divisibili* per 5.

17. — Analogamente, dovendo calcolare

$$(38 - 3) : 7$$

si farà subito

$$35 : 7 = 5$$

perchè nè 38 nè 3 sono *divisibili* per 7.

18. — Invece, ad es.,

$$(714 + 147) : 7 = (714 : 7) + (147 : 7) = 102 + 21 = 123$$
$$(714 - 147) : 7 = (714 : 7) - (147 : 7) = 102 - 21 = 81$$

19. — Riassumendo: come abbiamo già visto per la *moltiplicazione*, anche la *divisione esatta* è ***distributiva*** rispetto all'*addizione* e rispetto alla *sottrazione.*

20. — Senonchè, mentre nel caso della *moltiplicazione* (che è *commutativa*) si può *distribuire* tanto il *moltiplicando* quanto il *moltiplicatore*, invece nel caso della *divisione* (che *non* è *commutativa*) si può *distribuire* soltanto il *divisore.*

21. — Per mettere in guardia contro l'*errore* di *distribuire* il *dividendo*, valga il seguente esempio.

Mentre

$$30 : (2 + 3) = 30 : 5 = 6$$

invece

$$(30 : 2) + (30 : 3) = 15 + 10 = 25.$$

Esercizi

Si calcoli il valore di ogni espressione seguente, in due modi: com'è scritta e mediante raccoglimento di divisore comune.

1. $(507 : 13) + (494 : 13) + (299 : 13)$
2. $(4009 : 19) - (2109 : 19)$
3. $(1105 : 17) + (799 : 17) - (204 : 17)$
4. $(18000 : 2000) + (12000 : 2000)$
5. $(963 : 3) - (693 : 3)$
6. $(824 : 8) + (728 : 8) - (320 : 8)$.

Problemi

1. — Una vasca da bagno, quando è piena sino ad un certo segno, contiene 120 litri.

Tenendo aperto il rubinetto dell'acqua fredda, la vasca si riempie in 10 minuti. Invece, tenendo aperto il rubinetto dell'acqua calda, la vasca si riempie in 15 minuti.

In quanto tempo si riempirà la vasca, tenendo aperti i due rubinetti?

(In ogni *minuto*, quanti litri d'acqua fredda fluiscono nella vasca? quanti d'acqua calda? quanti in tutto?).

2. — Un tubo di scarico permette di vuotare la vasca in 12 minuti.

In quanto tempo la si riempirebbe nuovamente, tenendo aperto il rubinetto dell'acqua fredda e sollevata la valvola di scarico?

(In ogni *minuto*, quanti litri fluiscono nella vasca dal tubo dell'acqua fredda? quanti ne escono dal tubo di scarico? quanti ne rimangono nella vasca?),

3. — In quanto tempo la si vuoterebbe nuovamente, tenendo aperto il rubinetto dell'acqua calda e sollevata la valvola di scarico?

(In ogni *minuto*, quanti litri escono dal tubo di scarico? quanti fluiscono nella vasca dal tubo dell'acqua calda? di quanti litri diminuisce l'acqua ch'era contenuta nella vasca?).

4. — Infine, in quanto tempo la si riempirebbe ancora una volta, tenendo aperti i due rubinetti e sollevata la valvola di scarico?

5. — Se l'acqua fredda è a 10° e l'acqua calda è a 60° quale temperatura avrà l'acqua che viene a trovarsi nella vasca, tenendo aperti i due rubinetti?

(La *quantità di calore* di un corpo si misura in *calorie*.

Da 0° in poi, ogni *chilogrammo*, o litro, di *acqua* acquista tante *calorie* quanti sono i *gradi centigradi* che misurano la sua *temperatura*.

Quante *calorie*, in più di altrettanta acqua a 0°, possiedono i 12 litri d'acqua fredda, che entrano ogni minuto nella vasca? gli 8 litri di acqua calda, che entrano ogni minuto nella vasca? tutta l'acqua che entra ogni minuto nella vasca? qual è il suo *peso*? la sua *temperatura*?

In questo calcolo, non si tien conto delle *calorie* che inevitabilmente vanno disperse).

6. — Ora la vasca è vuota e la valvola di scarico è chiusa.

Apro i due rubinetti.

Dopo 3 minuti, chiudo il rubinetto dell'acqua calda.

Quanti minuti ancora dovrò tenere aperto il rubinetto dell'acqua fredda, per riempire la vasca? e che temperatura avrà l'acqua in essa contenuta?

(Sappiamo che, tenendo aperti i due rubinetti, entrano nella vasca 20 litri d'acqua al minuto. Quanti ne entrano in 3 minuti?

Sappiamo che, tenendo aperto il solo rubinetto dell'acqua fredda, ne entrano 12 litri al minuto. In quanti minuti entrerà tanta acqua, quanta ne manca per riempire la vasca?

Nei primi 3 minuti, è entrata nella vasca una certa quantità d'acqua, la cui temperatura sappiamo essere di 30 gradi. Poi è entrata nella vasca un'*eguale* quantità d'acqua a 10 gradi. Perciò, alla fine, l'acqua avrà la *temperatura media*. Di quanti gradi?).

CAPITOLO VII

APPLICAZIONI

§ 1. — Media aritmetica

1. — Nell'ultimo esame di matematica, Stefano ha avuto 5 punti nella prova scritta e 7 nell'orale.

Quanto in *media?*

$$(5 + 7) : 2 = 12 : 2 = 6.$$

2. — La ***media aritmetica*** di alcuni numeri (almeno due) è il *quoto* della loro *somma* per il loro *numero.*

Naturalmente, per adesso, ci accontentiamo di calcolare la *media* di numeri la cui *somma* sia *divisibile* per il loro *numero.*

3. — Michele ha avuto 7 punti nella prova scritta e 7 nell'orale.

Quanto in *media?*

$$(7 + 7) : 2 = 14 : 2 = 7.$$

4. — Dunque (senza fare operazioni inutili): la ***media aritmetica*** di ***numeri eguali*** è ***eguale*** ad ***uno di essi.***

5. — Enrico lavora a *cottimo* in una fabbrica di tessuti, cioè viene pagato in ragione del lavoro eseguito e non del tempo impiegato.

Ogni sera, il caposala segna nel libretto di Enrico quante *lire* egli dovrà avere alla fine della settimana, per il lavoro eseguito in quel *giorno.*

Ecco le annotazioni della settimana scorsa: lunedì 24, martedì 21, mercoledì 20, giovedì 21, venerdì 27, sabato 25.

Quanto in *media*, per ogni giorno di lavoro?

$$(24 + 21 + 20 + 21 + 27 + 25) : 6 = 138 : 6 = 23.$$

6. — Allorchè i numeri di cui si deve calcolare la *media aritmetica* sono piuttosto grandi, giova *sottrarre* da ciascuno di essi uno *stesso numero* e calcolare la *media* delle *differenze*, per *aggiungerla* poi al numero *sottratto.*

Così, nell' ultimo es., si poteva diminuire i numeri dati di 20, calcolare la media delle differenze

$$(4 + 1 + 0 + 1 + 7 + 5) : 6 = 18 : 6 = 3$$

ed infine la media cercata

$$20 + 3 = 23.$$

7. — Nella giornata di ieri, la temperatura di un ammalato fu misurata quattro volte, con questi risultati in *gradi* e *decimi* di grado:

37 e 3 38 38 e 7 37 e 6

Qual è stata la *temperatura media* di quell'ammalato?

8. — Tolgo 37 *gradi* da ciascuno dei numeri dati ed esprimo le differenze in *decimi* di grado:

3 10 17 6

La *media* delle *differenze* è

$$(3 + 10 + 17 + 6) : 4 = 36 : 4 = 9.$$

Concludo che la temperatura media è stata 37 e 9.

9. — Si badi che, nel calcolare la *temperatura media* di quell'ammalato, necessariamente ci si riferisce alle temperature misurate: senza escludere che, se le *osservazioni* fossero state *più frequenti* o fatte in *istanti diversi*, la temperatura media avrebbe potuto risultare alquanto *diversa* da quella ottenuta.

E ciò vale ogni qualvolta, da alcune *osservazioni saltuarie*, si voglia ricavare una *valutazione approssimata* di un *fenomeno continuo*.

10. — Altre volte, accade che una *medesima grandezza* venga misurata da parecchie persone con *risultati numerici alquanto diversi*.

Si accetterà quale *misura approssimata* di quella grandezza, la *media aritmetica* delle singole misure (sempreché le persone che le hanno eseguite inspirino eguale fiducia circa la loro accuratezza).

11. — Ad es., non rammentando esattamente l'altezza del Gennargentu (il più alto monte della Sardegna), consulto il Dizionario di coltura universale (edito dal Vallardi) ed il volume sulla Sardegna della Guida d'Italia (edita dal Touring Club italiano) e trovo che la vetta principale (Bruncu Spina) per l'uno è alta m. 1793 e per l'altro m. 1829.

Accetto, quale misura approssimata, la media di queste due indicazioni, e cioè metri

$$(1793 + 1829) : 2 = 1811.$$

Problemi

1. — Manlio è stato in viaggio una settimana. Partito con L. 755, è ritornato con L. 212.

Oltre ai biglietti ferroviari, che gli sono costati L. 151, in media quanto ha speso ogni giorno?

2. — Un insegnante fa 5 ore di lezione il lunedì, 4 il martedì, 4 il mercoledì, 3 il giovedì, 5 il venerdì e 3 il sabato.

In media, quante ore al giorno (domenica esclusa)?

3. — Un operaio è pagato a L. 28 il giorno (domenica esclusa) ed in media spende L. 21 al giorno (domenica compresa).

In media, quanto risparmia al giorno (domenica compresa)?

(Ogni settimana, quanto riceve? quanto spende? quanto risparmia? In altro modo, risparmia (28 — 21) 6 — 21 lire.

4. — Il prospetto seguente indica il numero dei *giorni* di pioggia e l'altezza in *millimetri* dell'acqua caduta, durante ciascun mese dell'anno 1920, nel bacino superiore del fiume Paraguay (America del Sud):

gennaio	giorni 26	mm. 182
febbraio	» 26	» 106
marzo	» 12	» 192
aprile	» 7	» 194
maggio	» 6	» 90
giugno	» 3	» 12
luglio	» 2	» 38
agosto	» 3	» 10
settembre	» 6	» 112
ottobre	» 6	» 157
novembre	» 15	» 185
dicembre	» 20	» 282

In media, quanti giorni di pioggia al mese e con quale altezza d'acqua?

(Per un caso, propizio al calcolo, ciascuna delle due somme è divisibile per 12).

5. — In tre rappresentazioni teatrali, con esito sempre più favorevole, gli incassi furono di lire 3925, 4465, 5110.

Quale fu l'incasso medio per recita?

6. — Due ruote hanno fatto 1431 giri, una in 53 minuti e l'altra in 27.

In media, quanti giri al minuto ha fatto ciascuna ruota?

7. — Per capo d'anno, Giorgetto ha ricevuto in dono dal nonno un libro di viaggi, di 136 pagine.

Il giorno stesso egli ne ha letto 10 pagine e così ha fatto il giorno dell'Epifania.

Alla fine di gennaio, Giorgetto annuncia al nonno di aver terminato la lettura di quel libro. E il nonno gli domanda quante pagine, in media, egli abbia letto in ciascuno degli altri giorni.

8. — Durante le vacanze estive, Antonio ha fatto un viaggio a piedi, per strade carrozzabili del Cadore e del Trentino, percorrendo km. 510.

Egli ha incominciato a camminare il mattino di un lunedì ed ha finito il diciannovesimo giorno, ma riposando ogni domenica.

In media, quanti km. al giorno ha camminato?

(Quante domeniche, in quei 19 giorni? quanti giorni ha camminato Antonio?)

9. — Nel febbraio 1923 (non bisestile), Pietro ha avuto L. 576 di paga: per aver lavorato 8 ore al giorno, ma riposando ogni domenica.

In media, quanto fu pagato per ogni ora di lavoro?

(Quante settimane ha lavorato? quanti giorni?

§ 2. — Somme di numeri naturali consecutivi

1. — Si vogliano *addizionare* i numeri naturali consecutivi, ad es., da 23 a 27.

Si pensa:

23 più 24 fa 47, più 25 fa 72, più 26 fa 98, più 27 fa 125.

E si conclude che la somma cercata è 125.

2. — Si voglia calcolare la somma

$$100 + 101 + 102 + ... + 199.$$

Mediante *addizioni successive* (come abbiamo fatto nel caso precedente), la pazienza del calcolatore è messa a dura prova.

Perciò vediamo se non vi sia *un modo più rapido* per calcolare la somma desiderata.

3. — Ritornando al caso precedente, sotto alla ***somma indicata***, scrivo la somma degli stessi numeri ***in ordine inverso***.

E poi ***addiziono per colonne***, così:

$$\begin{array}{c} 23 + 24 + 25 + 26 + 27 \\ 27 + 26 + 25 + 24 + 23 \\ \hline 50 + 50 + 50 + 50 + 50 \end{array}$$

Quest'ultima è la somma di 5 addendi (tanti, quanti erano gli ***addendi dati***) tutti *eguali* a 50 (cioè alla ***somma*** del ***primo*** e dell'***ultimo*** degli addendi dati).

Perciò, essa vale

$$50 \times 5.$$

Ma essa è *doppia* della somma cercata, la quale è dunque

$$(50 \times 5) : 2 = 250 : 2 = 125.$$

come si era trovato direttamente.

4. — Brevemente:

la somma dei numeri naturali consecutivi, da **23** a **27**, si può calcolare quale *metà* del *prodotto*

$$(23 + 27)\ 5$$

cioè: della ***somma degli estremi*** per ***il numero degli addendi.***

5. — Dopo ciò, la somma

$$100 + 101 + 102 + \ldots + 199$$

può essere calcolata senza spreco di tempo.

Basta osservare che *la somma degli estremi* è

$$100 + 199 = 299$$

e che *il numero degli addendi* è

$$199 - 99 = 100.$$

Quindi, la *somma* cercata vale

$$(299 \times 100) : 2 = 29900 : 2 = 14950.$$

6. — Giova avvertire che, sempre, uno (ed uno solo) dei due fattori è *divisibile* per 2. [1]

Quindi, invece di attendere a *dimezzare* il *prodotto*, può convenire di *dimezzare* sùbito il *fattore* che è divisibile per 2. [2]

7. — Il calcolo diventa anche più semplice nel caso particolare (ma di applicazione più frequente, e quindi più importante) in cui il primo addendo è 1.

Ad es., si voglia calcolare la somma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.$$

In questo caso, *la somma degli estremi* è $1 + 100$, cioè 101, che è *il successivo* di 100, ed *il numero degli addendi* è 100, cioè *l'ultimo addendo*.

Scambiando i due fattori, la somma cercata vale

$$(100 \times 101) : 2 = 50 \times 101 = 5050.$$

---

[1] Infatti: se *il numero degli addendi* è *dispari*, allora gli estremi sono entrambi *pari* o entrambi *dispari*; comunque, la loro somma è *pari*.

(Se invece, *il numero degli addendi* è *pari*, allora uno degli estremi è *pari* e l'altro è *dispari*; sicchè la loro *somma* è *dispari*).

[2] *Dimezzare*, cioè *dividere per due* (e non *dividere per metà*, come alcuni dicono erroneamente).

8. — Brevemente:
ogni somma di numeri naturali consecutivi, a cominciare da 1, è la *metà* del *prodotto* dell' *ultimo numero* per *il suo successivo*.

9. — Ad es.,

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=(9\times 10):2=9\times 5=45$$

come agevolmente si può verificare (in questo caso), mediante addizioni successive.

Esercizi

1. — Verificare che hanno una medesima somma i numeri naturali consecutivi:

da 499 a 500,	da 332 a 334,
da 164 a 169,	da 107 a 115,
da 47 a 64,	da 24 a 50,
da 9 a 45.	

2. — Calcolare la somma dei numeri naturali consecutivi da 67 a 133.

Fare la prova, calcolando separatamente le somme dei numeri naturali consecutivi da 1 a 133 e da 1 a 66, e poi la differenza delle due somme.

3. — Calcolare la somma dei 40 numeri naturali consecutivi, il primo dei quali è 50.

(L'ultimo è $50+40-1$).

4. — Calcolare la somma dei 30 numeri naturali consecutivi, l'ultimo dei quali è 75.

(Il primo è $75-30+1$).

Problemi

1. — Il signor Ambrogio, entrato in un'azienda industriale come apprendista, ne diventò direttore amministrativo.

Il prim'anno servì gratuitamente. Il secondo ebbe lo stipendio di L. 1000, il terzo di L. 2000, il quarto di L. 3000 e così di seguito.

Dopo 40 anni di servizio, il consiglio d'amministrazione gli assegnò una pensione annua eguale ad un trentesimo della somma degli stipendi da lui percepiti sin'allora. Quanto?

(Si faccia il calcolo in biglietti da mille).

2. — Al principio del 1924 (bisestile) il signor Anselmo decise di mettere in serbo, ogni giorno, tanti centesimi quanti ne avrebbe indicati il numero d'ordine di quel giorno nell'anno.

Quanto avrà messo in serbo, alla fine di quell'anno?

(Si faccia il calcolo in centesimi; poi si dica a quante lire complete ed a quanti centesimi residui equivalgono i centesimi calcolati).

3. — L'anno stesso, il figlio Arturo si accontentò di mettere in serbo, ogni giorno, tanti centesimi quanti ne avrebbe indicati il numero d'ordine di quel giorno nel mese: ricominciando da capo ogni mese.

Quanto avrà messo in serbo, in capo all'anno?

(Si faccia il calcolo in centesimi, dapprima come se ogni mese avesse 29 giorni e poi aggiungendo tante volte 30 e tante volte 31 quanto occorre).

Una fornitura di ghiaia

Amilcare ha assunto dal suo comune una fornitura di ghiaia, lungo un tratto di strada che si estende 10 km. al di qua, e 6 al di là, della testata del ponte, dalla quale una carreggiabile scende al letto del fiume.

Da questo egli deve attingere la ghiaia, ed approntarne un mucchio, di un m³, ogni 50 m. di strada.

A tale scopo, si fa aiutare da Antonio, che vaglia la ghiaia e ne carica, su una carretta, quanta occorre per ogni mucchio.

Amilcare stesso guida la carretta, tirata da un cavallo, scarica la ghiaia e la ammucchia.

Quand'è sulla strada, percorre 4 km. all'ora. Ma, ogni volta, impiega un'ora per il carico e lo scarico, nonchè per salire dal letto del fiume alla testata del ponte e ridiscendere.

Ogni giorno spende L. 15 per il cavallo.

Ogni giorno, che non sia domenica, Amilcare lavora in media 8 ore e dà 20 lire ad Antonio.

Il compenso del comune per tutta la fornitura è di L. 12·140 (nette di tasse).

Il lavoro è incominciato un martedì.

Quando Amilcare l'avrà finito, quanto avrà guadagnato?

(Si pensi dapprima al tratto di strada, che si estende 10 km. al di qua della testata del ponte. Di quanti tratti di 50 m. si compone? e perciò quanti tratti di 50 m. deve percorrere Amilcare, con la carretta, dalla testata ai luoghi in cui deve ammucchiare la ghiaia? e quanti per ritornare alla testata? quanti in tutto? quanti metri a 50 m. per ogni tratto? quanti km? (km. 2010)

Analogamente, quanti km. deve percorrere sul tratto di strada, che si estende 6 km. al di là della testata del ponte? (km. 726)

In tutto, quanti km. di strada deve percorrere? in quante ore, a 4 km. all'ora? (ore 684)

Quanti sono i mucchi da una parte? quanti dall'altra? quanti in tutto, compreso quello alla testata del ponte?

Quante ore impiega in lavori accessori, carico e scarico, salire e ridiscendere, ad un'ora per mucchio? (ore 321)

In tutto, quante ore richiede il lavoro? quanti giorni lavorativi, ad 8 ore al giorno, compreso quello incompleto? (giorni 126)

Quante lire spettano ad Antonio, a L. 20 il giorno?

Il lavoro essendo durato ... settimane lavorative ed incominciato di martedì, quante domeniche trascorreranno prima che il lavoro sia compiuto? quanti giorni durerà effettivamente? (giorni 148)

Quanto costa dunque il cavallo, a L. 15 il giorno?

In tutto, quale sarà la spesa di Amilcare? (L. 4740)

Ricevendo L. 12·140 dal comune, quanto guadagnerà in tutto? al giorno, comprese le domeniche?). (L. 50)

§ 8. — Un po' di storia del calendario

1. — La *misura* del *tempo* non fa parte del sistema metrico decimale.

Essa si fonda sulla *durata* di alcuni fenomeni astronomici:

rotazione della Terra intorno al proprio asse (*giorno*),

rotazione della Luna intorno alla Terra (*mese*),

rotazione della Terra intorno al Sole (*anno*).

2. — Anticamente, si desumeva la durata del giorno

da quella di una rotazione apparente del Sole intorno alla Terra.

Questa durata (***giorno solare vero***) è un po' ***variabile*** col volgere delle stagioni.

Quindi, si trovò conveniente di sostituirle una durata *costante* (***giorno solare medio***). [1]

3. — Allorchè si parla di ***giorno*** (senz'altro) si intende parlare del *giorno solare medio.*

Esso si compone di 24 *ore.*

Ogni ***ora*** si compone di 60 ***minuti*** (primi).

Ogni *minuto* si compone di 60 (minuti) ***secondi.***

Sicchè, ciascuna delle parole

giorno, ora, minuto, secondo

indica una *durata costante.*

4. — Il Comitato internazionale dei Pesi e misure ha adottato le abbreviazioni «h» *ore*, «m» *minuti*, «s» ***secondi***, da scrivere ***a destra*** dei numeri: ***in alto*** od ***in basso***, secondochè si tratta di indicare un ***istante*** o una ***durata.***

Ad es., un treno che parte alle 5^h 21^m 32^s ed arriva alle 8^h 29^m 47^s, impiega 3_h 8_m 15_s.

5. — Altra ***durata costante*** è la ***settimana*** [2], di cui già si parla nell' Antico Testamento, a proposito della Creazione del mondo.

---

[1] Gli astronomi desumono la durata di una rotazione della Terra intorno al proprio asse da quella di una rotazione apparente di una stella (che non sia il Sole) intorno alla Terra.

Questa durata è *costante* (***giorno sidereo***) ed è un po' minore del giorno solare medio.

Sidereo, delle stelle, dal latino «sidus».

[2] Dal latino «septem mane», *sette mattine*, per «sette giorni».

6. — Oltre che al *giorno* ed alla *settimana*, gli Ebrei ricorsero al tempo che trascorre fra due *noviluni* consecutivi (***mese lunare vero***), incominciando ciascun *mese* col *novilunio.*

Questa durata è un po' *variabile.*

Quindi, si trovò conveniente di sostituirle una durata *costante* (***mese lunare medio***), che è:

29 giorni, 12 ore, 44 minuti, 2 secondi ed 8 decimi (di secondo).

7. — Ritenendo il *mese lunare* di circa 29 giorni e 12 ore, gli Ebrei diedero al *mese civile* una durata alterna di giorni 29 e 30.

E così *l'antico anno ebraico*, di 12 mesi, era di giorni

$$(29 + 30)\ 6 = 59 \times 6 = 354.$$

8. — Anche la durata di una rotazione della Terra intorno al Sole (***anno solare vero***) è un po' *variabile.*

Quindi, si trovò conveniente di sostituirle una durata *costante* (***anno solare medio***), che è:

365 giorni, 5 ore, 48 minuti, 51 secondi e 6 decimi.

9. — Sono d'uso comune le parole

bimestre, trimestre, quadrimestre, semestre

per indicare una *durata* di *mesi* (consecutivi) 2, 3, 4, 6 e le parole

biennio, triennio, quadriennio, quinquennio

per indicare una *durata* di *anni* (consecutivi) 2, 3, 4, 5.

Invece di *quinquennio*, si diceva ***lustro***; ma è parola caduta in disuso.

Due quinquenni fanno un ***decennio.***

Infine, le parole

secolo e ***millennio***

indicano una *durata* di *anni* (consecutivi) 100 e 1000.

10. — Gli antichi Romani avevano un' idea molto vaga della *durata* del *mese* e dell'*anno*: quantunque, per formarsela in modo sufficientemente approssimato, bastasse osservare il succedersi delle *fasi lunari* e delle *stagioni*.

Romolo si accontentò di adottare l'*anno civile* degli Albani e dei Sabini, ch'era di appena 304 giorni e composto di soli 10 mesi (6 di 30 giorni e 4 di 31): da *marzo* a *dicembre*.

Questa notizia chiarisce come, allora, il *settembre*, l'*ottobre*, il *novembre* ed il *dicembre* fossero veramente il mese *settimo*, *ottavo*, *nono* e *decimo*.

11. — Più approssimata cognizione della durata dell'*anno solare* ebbe Numa Pompilio: poichè egli istituì l'*anno civile* di 355 giorni (un giorno più dell'antico anno ebraicc), composto di 12 mesi: da *gennaio* a *febbraio*.

Inoltre, ad un anno sì ed uno no, egli aggiunse un tredicesimo mese, chiamato *mercedonio* (perchè preferito per i grossi pagamenti di *merci*), con durata alterna di giorni 22 e 23.

Quest'aggiunta, di 45 giorni in 4 anni, dava, in media, un'aggiunta annua di 11 giorni e 6 ore: sicchè, in media, l'*anno di Numa* durava 366 giorni e 6 ore.

12. — Poichè in *otto anni* la durata dei quattro mesi *mercedoni* era di giorni 90, nell'anno 450 (avanti Cristo) i Decemviri stabilirono che in *otto anni* vi fossero *tre* soli mesi *mercedoni*, ciascuno di giorni 30.

Inoltre, essi anteciparono di un mese il *Capodanno*, cioè lo portarono al *primo febbraio* di Numa.

Così, il *febbraio*, ch'era *l'ultimo* mese divenne *il primo*. Ma, per conservare apparentemente il Capodanno al *primo gennaio*, i Decemviri scambiarono i nomi *gennaio* e *febbraio*. Ed in questo modo, il *febbraio* divenne e rimase il *secondo mese* dell'anno.

13. — Il primo giorno di ciascun mese si chiamava *calende* (dal greco kaleo, *chiamare*), perchè *proclamato* pubblicamente dai sacerdoti ed anche perchè preferito per la *convocazione* di pubbliche adunanze.

Di qui la parola *calendario*, comunemente usata per designare un prospetto in cui sono indicati i mesi ed i giorni dell'anno civile, le fasi lunari, le feste, ecc.

14. — Giulio Cesare apprese dall'astronomo egizio Sosìgene che l'*anno solare* era circa 365 giorni e 6 ore, cioè un giorno di meno della *durata media* dell'*anno* di *Numa* e dei *Decemviri.*

Valendosi dei suoi poteri di Pontefice massimo, Giulio Cesare soppresse i mesi *mercedoni* e modificò la *durata* dei soliti 12 mesi, in modo che *l'anno comune* risultasse di 365 giorni.

Inoltre, aggiunse *un giorno* ogni *quattro anni.*

Questo giorno *aggiunto* venne considerato come un *raddoppiamento* del giorno *sesto* che precede le calende di marzo; e perciò esso giorno venne detto *bis sesto* e l'anno che lo contiene fu chiamato *anno bisestile.*

Per noi, il giorno spettante in più agli *anni bisestili* è il *29 febbraio.*

15. — Il *calendario giuliano* (di Giulio Cesare fu attuato l'anno 706 dalla fondazione di Roma (cioè l'anno 47 avanti Cristo).

Per la prima volta, allo scopo di eliminare gli errori che si erano venuti accumulando, vennero aggiunti 90 giorni ai soliti 355. Così, quell'anno ebbe la durata di 445 giorni e fu chiamato *l'anno della confusione.*

16. — Per avere la *durata* dell'*anno civile medio* (del calendario giuliano), ai 365 giorni dell'*anno comune* bisogna aggiungere il riparto (nel quadriennio) del giorno in più rimasto nell'*anno bisestile.*

Facendo il calcolo in *ore*, il riparto risulta di ore

$$24 : 4 = 6.$$

Dunque l'***anno civile medio*** era di 365 giorni e 6 ore.

17. — Fra il III ed il IV secolo (dopo Cristo) venne istituito ***il nuovo anno ebraico*** per dargli una ***durata media*** più prossima alla durata dell'*anno solare*, pur conservando ***i mesi lunari.***

In 19 anni, costituenti un *ciclo d'oro*, furono chiamati ***embolismici*** (cioè *accresciuti*) gli anni corrispondenti ai numeri

3, **6**, 8, 11, 14, 17, 19

e ad essi vennero attribuiti 13 mesi, restando di 12 mesi tutti gli altri anni, detti *semplici.*

Sicchè, il numero delle *lunazioni* di un *ciclo d'oro* divenne

$$(12 \times 19) + 7 = 235.$$

18. — Fra l'XI ed il XII secolo (dopo Cristo) furono fatti calcoli più accurati della durata dell'*anno solare medio*, che risultò sensibilmente *minore* dell'*anno civile medio* di Giulio Cesare.

19. — Per *diminuire* la *differenza*, il papa Gregorio XIII stabilì che fossero *bisestili* gli anni il cui *numero* (dell'êra cristiana) è *divisibile per quattro* ma non *termina con due zeri*, e che gli *anni secolari*

1600, 1700, 1800, 1900, ...

venissero considerati a parte:

uno bisestile (a cominciare dal 1600)
e *tre comuni* (1700, 1800, 1900);

poi, nuovamente, *uno bisestile* (2000) e *tre comuni*; e così via.

Cioè: stabilì che un *anno secolare* fosse *bisestile* sol

quando, soppressi i due zeri finali, rimanesse un numero *divisibile* per *quattro.*

20.—Il ***calendario gregoriano*** (di Gregorio XIII) fu attuato il giorno 4 ottobre 1582, che venne chiamato 15 ottobre 1582, correggendo in tal modo gli errori che si erano accumulati sino allora.

21. — Nel calendario *giuliano,* gli anni *bisestili* di ogni *secolo* erano

$$100 : 4 = 25.$$

Invece, nel calendario *gregoriano,* ogni *secolo* con 25 anni *bisestili* è seguìto da *tre secoli,* ciascuno dei quali ne ha soltanto

$$25 - 1, \text{ cioè } 24.$$

Sicchè, in 4 *secoli,* gli anni *bisestili* sono

$$25 + (24 \times 3) = 25 + 72 = 97.$$

22. — In altro modo: in 4 *secoli,* cioè in 400 anni, gli *anni bisestili* erano (nel calendario *giuliano*)

$$400 : 4 = 100.$$

e si sono ridotti (nel calendario *gregoriano*) a

$$100 - 3 = 97.$$

23. — Quindi, per avere la *durata* dell'***anno civile medio*** (del calendario gregoriano), ai 365 giorni dell'*anno comune* bisogna aggiungere il riparto (in 400 *anni*) dei 97 *giorni* spettanti in più agli anni bisestili.

24. — Ogni giorno si compone di ore 24, cioè minuti 60×24, cioè secondi $60 \times 60 \times 24$.

Quindi, 97 giorni si compongono di secondi

$$60 \times 60 \times 24 \times 97$$

ed il riparto cercato è di secondi

$$(60 \times 60 \times 24 \times 97) : 400$$

cioè

$$(60 : 10)\,(60 : 10)\,(24 : 4)\,97$$

cioè

$$6 \times 6 \times 6 \times 97 = 216\,(100 - 3) = 21600 - 648 = 20952.$$

Dunque, la *durata* del *nostro anno civile medio* è 365 giorni e 20952 secondi.

25. — Dividiamo 20952 per 60 e poi dividiamo il quoziente per 60, così:

```
20952 | 60
 295    349 | 60
  552    49   5
   12
```

Risulta che 20952 secondi equivalgono a 349 minuti e 12 secondi, e che 349 minuti equivalgono a 5 ore e 49 minuti.

Sicchè, 20952 secondi equivalgono a

5 ore, 49 minuti e 12 secondi.

E perciò, la *durata* del nostro *anno civile medio* è
365 giorni, 5 ore, 49 minuti e 12 secondi.

26. — Anch'esso è un po' *maggiore* dell'*anno solare medio*, la cui *durata* (come ho detto) è
365 giorni, 5 ore, 48 minuti, 51 secondi e 6 decimi.
Sicchè: l'anno *civile* è 12 secondi di *più* di

365 giorni, 5 ore e 49 minuti

e l'anno *solare* è 8 secondi e 4 decimi di *meno.*

Perciò, il divario è di 20 secondi e 4 decimi.

27. — L'*errore annuo* non è trascurabile, ma non è tale da impensierire.

In un *quinquennio*, i 20 secondi diventano 100, ed i 4 decimi di secondo diventano 20 decimi, cioè 2 secondi.

Dunque, l'*errore* in un *quinquennio* è di 102 secondi.

28. — Perciò, affinchè l' *errore* si approssimi a diventare *un giorno*, cioè 86400 secondi, dovranno trascorrere *tanti quinquenni* quante volte il 102 sta in 86400

```
86400 | 102
 480    847
  720
    6
```

Si conclude che occorrono 847 quinquenni, cioè 4235 *anni*, affinchè l'*errore* sia di *un giorno* (meno 6 secondi).

Possiamo, dunque, lasciare ai posteri la cura di correggerlo !

29. — Per capire che cosa siano 4235 anni, pensi il mio giovane lettore che:

il calendario ebraico fa risalire la *creazione del mondo* a 3760 anni a. C. (*avanti Cristo*),

la prima festa in onore di Giove ad Olimpia, inizio dell'*êra delle Olimpiadi*, risale a 776 anni a. C.,

la *fondazione di Roma* a 753 anni a. C.

e l'*êra dell'Egira* dei Maomettani a 622 anni d. C.

30. — I Greci non hanno adottato il calendario *gregoriano.* Usano ancora il calendario *giuliano.*

DOMANDE.

1. — *Di quante settimane complete e di quanti giorni residui è composto un anno comune? un anno bisestile?*

2. — *L'anno 1901 essendo incominciato di martedì che giorno della settimana fu il 31 dicembre di quell'anno?*

3. — *Come (cioè: con qual giorno della settimana) incominciò il 1902?*

4. — *Come finì il 1902 e come incominciò il 1903?*

(Dunque: sapendo *come* incomincia un anno *comune*, si viene a sapere che l'anno *successivo* incomincia col giorno *successivo*).

5. — *Come incominciò il 1904?*

(Anche il 1904 fu il *successivo* d'un anno *comune*).

6. — *Come incominciò il 1905?*

L' anno *bisestile* 1904 essendo incominciato di *venerdì*, che giorni della settimana furono il 30 ed il 31 dicembre di quell'anno? e, quindi, come incominciò il 1905?

(Dunque: sapendo come incomincia un anno *bisestile*, basta *saltare* un giorno della settimana, per sapere come incominci l'anno *successivo*).

7. — *Come incominciò il 1906? il 1907? il 1908?*

8. — *Come incominciò il 1909?*

9. — *Quale sarà il* primo *anno* bisestile *incominciante di* domenica?

(Per rispondere a questa domanda e a taluna delle seguenti, giova compilare un *prospetto* in cui, a destra del *numero* di ciascun anno si scrive il *nome* del suo primo giorno.

Si incomincia con: 1901 martedì,
1902 mercoledì,
1903 giovedì,
1904 venerdì.

Si salta il sabato e si scrive:

1905 domenica,
1906 lunedì,
1907 martedì,
1908 mercoledì.

E si prosegue finchè si giunge all'anno richiesto).

10. — *In che giorno della settimana l'Italia partecipò alla guerra mondiale, dichiarando guerra all'Austria?*

(Come sappiamo, il *maggio* di un anno *comune* è *preceduto* da 120 giorni. Perciò, il 24 maggio fu il giorno 144 dell'anno 1915.

Di quante settimane complete e di quanti giorni residui si compongono 144 *giorni*?

Il *nome* del giorno 21 maggio 1915, *primo* dei giorni residui, fu dunque lo stesso del *capodanno* 1915, che risulta dal nostro *prospetto*. Quindi, ecc.).

11. — *In che giorno della settimana è nato il mio giovane lettore?*

(Il procedimento, che ha servito a rispondere alla domanda precedente, serve a trovare il *giorno* della settimana corrispondente a qualunque *data*, dal capodanno 1901 in poi).

12. — *Come varia il capodanno, al trascorrere di 4 anni?*

(Dagli anni considerati in questa domanda e nelle seguenti, escludo gli anni secolari non bisestili, come fu il 1900.

Sicchè, di 4 anni consecutivi, tre sono comuni ed uno bisestile; e perciò, nel determinare i giorni di capodanno, tre volte si procede al giorno seguente ed una volta si salta un giorno: in tutto si procede di 5 giorni, cioè si retrocede di 2.

Or dunque: *procedendo* di 4 anni, il capodanno *retrocede* di 2 giorni.

Il lettore si valga di questa regola, per qualche *verifica* del *prospetto* ch'egli ha compilato).

13. — *Come incominciano gli anni bisestili dal 1904 al 1932?*

(La regola trovata poc'anzi consente di rispondere a questa domanda, mediante la compilazione di un apposito *prospetto saltuario*.

Si incomincia con

1904 venerdì.

Procedendo di 4 anni e retrocedendo di 2 giorni, si scrive:

1908 mercoledì,
1912 lunedì

e così si continua.

Si ha così un modo per *verificare* l'esattezza del *prospetto progressivo* già compilato e della *risposta* alla domanda 9).

14. — *Quanti anni devono trascorrere, prima che la successione dei giorni di capodanno si riproduca* periodicamente?

(Dal *prospetto saltuario* risulta che i 7 anni bisestili dal 1904 al 1928 incominciano con giorni della settimana fra loro tutti diversi; e che il 1932 incomincia di venerdì, come il 1904.

Dal capodanno 1904 al 31 dicembre 1931 sono 28 anni; è questa la *durata* di un **ciclo solare**, che si può cominciare da un capodanno qualunque: purchè nessuno dei 28 anni sia il 1900).

15. — *Qual è il prossimo anno in cui il febbraio avrà 5 domeniche?*

(Affinchè il febbraio abbia 5 domeniche, esso deve incominciare e finire di domenica; e perciò l'anno dev' essere *bisestile* e incominciare di...

Nel *prospetto saltuario* vi è un solo anno che incomincia di...

Lo si cerchi ed al suo numero si aggiunga 28, durata dei *ciclo solare*).

16. — *In 28 anni consecutivi, quanti ve ne sono con 53 domeniche?*

(Ogni anno ha *almeno* 52 domeniche e non più di 53, perchè ogni anno le settimane complete sono 52 e non vi può essere più di una domenica nei giorni residui.

Perciò, intanto, hanno 53 domeniche gli anni, comuni o bisestili, che incominciano di domenica; e di questi, in ogni *ciclo solare*, ve ne sono *tanti* quanti ve ne sono che incominciano di lunedì, o di martedì, ecc. Quanti?

Inoltre, hanno 53 domeniche gli anni bisestili che incominciano di sabato; dei quali, in 28 anni consecutivi, ve n'è uno solo.

Si risponda alla domanda e si cerchino gli anni considerati nel *prospetto progressivo.*

Qual è il *prossimo* anno con 53 domeniche?)

17. — *Com'è incominciato il 1899?*

(Poichè il 1901 è incominciato di martedì, il 1900 non bisestile è incominciato di . . . e quindi il 1999 di . . .).

18. — *Che giorno della settimana fu il capodanno 1870?*

(L' anno 1899 essendo incominciato di domenica, anche 28 anni prima, cioè nel..., il capodanno fu di domenica. Quindi, come incominciò il 1870?).

19. — *In che giorno della settimana l'Italia riconquistò Roma?*

(Come sappiamo, il *settembre* di un anno comune è *preceduto* da 243 giorni. Perciò, il 20 settembre, fu il giorno 263 dell'anno 1870.

Di quante settimane complete e di quanti giorni residui si compongono 263 giorni?

Il capodanno 1870 essendo stato di sabato, anche il primo dei giorni residui fu un sabato. Quindi, ecc.).

20. — Che giorno della settimana fu il capodanno 1848?

(L'anno 1871 essendo incominciato di domenica, anche 28 anni prima, cioè nel..., il capodanno fu di domenica. Ora si rammenti che, procedendo di 4 anni, il capodanno retrocede di due giorni; e che, procedendo ancora di un anno comune, il capodanno procede di un giorno).

21. — Che giorni della settimana furono, nel 1848, il 22 marzo e l'8 agosto, in cui Venezia e Bologna cacciarono gli austriaci?

(Non si dimentichi che il 1848 fu *bisestile*).

§ 4. — Un approvvigionamento in alta montagna

1. — Il fatto accadde in *A*, ridente cittadina delle nostre prealpi, in cui il Comando militare aveva istituito una base di approvvigionamenti, durante le manovre estive.

Un giorno, un capitano commissario chiama nel suo ufficio un tenente e gli dice:

— Sta per giungere un battaglione di alpini, composto di 1000 uomini e 100 muli. Andrà ad accamparsi sull'altopiano *B*, dove dovremo rifornirlo giornalmente di viveri (2 kg. per uomo, pane compreso) e di foraggio (20 kg. per mulo, avena compresa).

Per sua norma, occorrono 16 ore nette di cammino, lungo la mulattiera, per andare da *A* a *B*; e quindi occorrono due giorni.

Fortunatamente, proprio a metà strada, c'è il villaggio *C*, opportunissimo per i pernottamenti, ma completamente sprovvisto. Sicchè le colonne marcianti dovranno portare anche il foraggio che consumeranno durante il

viaggio di andata e di ritorno, oltre ai viveri per gli uomini: un conducente per mulo.

Favorisca di farmi il preventivo dei muli occorrenti per tale servizio, facendoli partire col carico massimo: un quintale per mulo, oltre alla soma

2. — Il tenente si ritira nel suo ufficio ed incomincia a riflettere:

— Ogni colonna rimarrà assente 4 giorni (2 per l'andata e 2 per il ritorno).

Apparentemente, essa dovrebbe portare, per proprio uso, 4 razioni di viveri e di foraggio.

Ma io ridurrò queste razioni, da 4 a 3, ordinando che uomini e muli consumino qua: mezza razione il mattino in cui partono e mezza la sera in cui ritornano.

3. — Ciò stabilito, ecco i suoi ragionamenti ed i suoi calcoli.

— Ogni mulo deve portare, anzitutto, 3 razioni di foraggio per sè e 3 razioni di viveri per il suo conducente, cioè kg.

$$(20 + 2)\ 3 = 22 \times 3 = 66$$

e quindi non potrà portare in *B* altro che kg.

$$100 - 66 = 34.$$

D'altra parte, la colonna deve portare in *B* le 1000 razioni di viveri e le 100 razioni di foraggio, occorrenti al battaglione che sta per accamparvisi, cioè kg.

$$(2 \times 1000) + (20 \times 100) = 2000 + 2000 = 4000$$

Quante volte sta il 34 in 4000?

```
4000 | 34
  60 |----
 260 | 117
  22
```

Adoperando 117 muli, in *B* verrebbero portati 22 kg. di meno di quanto occorre.

Perciò, bisogna adoperare 118 muli.

Nè sembri troppo lieve il carico dell' ultimo quadrupede, perchè anch'esso deve portare 66 kg. di scorta; e cioè, in tutto, kg.

$$66 + 22 = 88.$$

Ora, mentre il battaglione avrà bisogno di essere rifornito giornalmente, ciascuna colonna rimarrà in viaggio 4 giorni.

Quindi, occorrono 4 colonne di 118 muli, cioè

$$118 \times 4 = 472$$

muli ed altrettanti conducenti.

4. — A questo punto, il tenente ritorna dal capitano, che gli domanda:

— Quanti muli?

— 472.

— Troppi.

— Eppure, signor capitano, credo esatto il mio calcolo.

Il capitano dà un'occhiata al foglio presentatogli dal tenente e, restituendoglielo, gli dice:

— Il suo calcolo è esatto, ma le ripeto che i muli sono troppi.

— Perdoni,—balbetta il tenente — non capisco.

— Ora capirà (soggiunge, sorridendo, il capitano). Mi dica un po'. Stando al suo programma, che cosa accadrà nel villaggio *C*, che le ho detto trovarsi a metà strada?

— Accadrà che ogni colonna potrà pernottarvi, sia all'andata che al ritorno.

— E quante razioni vi consumerà ogni colonna, nel viaggio di andata?

— Mezza la sera, arrivandovi, e mezza il mattino seguente, ripartendone.

— Ed allora i suoi muli, che erano partiti a carico completo (di un q.), si rimetteranno in cammino a carico completo?

— No; perchè, essendo già consumata una delle 3 razioni di scorta, non ne avranno da portare che 2.

— Nemmeno. Essi ne porteranno una sola.

— Una sola?

— Certamente. La colonna lascerà una delle 2 razioni, in un magazzino di *C*, per consumarvela nel viaggio di ritorno, come avrà fatto in quello di andata, e cioè: mezza la sera, arrivandovi, e mezza il mattino seguente, ripartendone. Essa porterà dunque con sè una sola razione, da consumare in *B* nel solito modo (mezza la sera, arrivandovi, e mezza il mattino seguente, ripartendone).

— Giustissimo, eppure non vedo...

— Io vedo che, il secondo giorno, ciascuno dei suoi muli viaggerebbe troppo comodamente, portando soltanto kg.

$$22 + 34 = 56.$$

— E come si rimedia?

— Spezzando la colonna in due, di cui una farà la spola fra *A* e *C* e l'altra fra *C* e *B*, entrambe iniziando il viaggio a carico completo. Favorisca di rifare il preventivo, incominciando da quello per la seconda colonna.

5. — Ed ecco, di nuovo, il tenente nel suo ufficio a ragionare e calcolare.

— La seconda colonna, che viaggia fra *C* e *B*, parte

da *C* con una sola razione di scorta. Quindi, ogni mulo potrà portare in *B* kg.

$$100 - 22 = 78.$$

Quante volte sta il 78 in 4000?

$$\begin{array}{r|l} 4000 & 78 \\ \cline{2-2} 100 & 51 \\ 22 & \end{array}$$

Occorrono dunque 52 muli, di cui 51 a carico completo, mentre uno porterà soltanto kg.

$$22 + 22 = 44.$$

Le 2 razioni occorrenti alla seconda colonna (da consumare una in *C* e l'altra in *B*) pesano dunque kg.

$$22 \times 52 \times 2 = 2288$$

Sicchè, la prima colonna dovrà portare in *C* questi kg. 2288 destinati alla seconda, oltre ai kg. 4000 destinati al battaglione accampato in *B*, e cioè kg.

$$4000 + 2288 = 6288.$$

Ma anche la prima colonna (come la seconda) porta una sola razione di scorta per sè e quindi ogni mulo potrà inoltre portare in *C* kg. 78.

Quante volte sta il 78 in 6288?

$$\begin{array}{r|l} 6288 & 78 \\ \cline{2-2} 48 & 80 \end{array}$$

Occorrono dunque 81 muli, di cui 80 a carico completo, mentre uno porterà soltanto kg.

$$22 + 48 = 70.$$

Riassumendo, le due colonne richiedono muli

$$81 + 52 = 133.$$

Ciascuna di queste colonne compie il suo viaggio in 2 giorni (uno per l'andata ed uno per il ritorno).

Quindi, per il rifornimento giornaliero in B, occorrono 2 colonne viaggianti fra A e C, e 2 fra C e B.

Perciò, i muli richiesti dal servizio completo sono

$$133 \times 2 = 266.$$

6. — Il tenente ritorna dal capitano.

— Quanti muli?

— 266.

— E prima quanti credeva che ne occorressero?

— 472.

— Vede!—esclama, soddisfatto, il capitano — I muli, che si risparmiano, sono nientemeno che

$$472 - 266 = 206.$$

In quel momento entra un soldato ad avvertire il capitano che il maggiore lo desidera.

7. — Siamo nell'ufficio del maggiore.

— Buon giorno, capitano. È pronto il preventivo dei muli, che occorreranno per l'approvvigionamento in B?

— Sì, signor maggiore.

— Quanti muli?

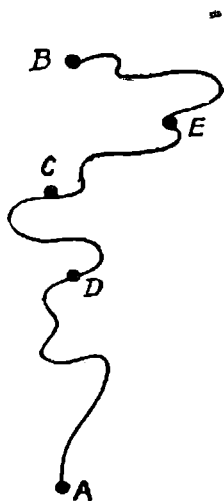
— 266.

— Troppi.

— Eppure...

— Mi faccia vedere.

Il capitano gli porge i foglietti del tenente e glieli commenta.

Verificati i calcoli, il maggiore osserva la carta topografica della regione e poi dice:

— Fortunatamente, i villaggi *D* ed *E* dimezzano, quasi esattamente, le due tappe. Anche accogliendo il suo progetto, essi sarebbero utilissimi per gli incroci delle quattro colonne marcianti: incroci che non potrebbero farsi sulla mulattiera. Ma, poichè ha avuto la buona idea di spezzare una colonna in due, perchè non spezzarla in quattro?

— Ed il vantaggio?

— Vi sono due vantaggi. Il primo è che, ogni giorno, ciascuna colonna fa 4 ore in salita e 4 ore in discesa, sempre sulla stessa strada, di cui si impratichiscono uomini e muli; e pernotta sempre nello stesso posto. — Ed il secondo vantaggio è che ogni colonna consuma tutta la sua razione nella sua base di partenza (mezza al mattino e mezza alla sera), cosicchè la quarta colonna porta in *B* soltanto le razioni destinate al battaglione.

— D'accordo. Però, durante il giorno, tanto in *D* quanto in *E*, bisognerà provvedere alla custodia dei viveri e del foraggio, ivi lasciati.

— La popolazione è tranquilla ed onesta. A difesa dai ladruncoli, basteranno due uomini per posto. E ne occorreranno due anche in *C*, del che non aveva tenuto conto.

— Sono però 6 uomini da immobilizzare e da approvvigionare.

— Le 6 razioni giornaliere peseranno appena kg.

$$2 \times 6 = 12$$

e, se si risparmiano muli, si risparmiano altrettanti conducenti: sicchè, a conti fatti, spero che avremo una

economia anche di uomini. Favorisca dunque di rifare il calcolo e, per far presto, si faccia aiutare dal tenente: perchè oggi stesso il signor colonnello vuol dare gli ordini per questo servizio.

8. — Ed eccoci nuovamente nell' ufficio del capitano, dov'egli lavora, assistito dal tenente.

La *quarta* colonna, che deve portare (da *E* a *B*) soltanto i 4000 kg. di sussistenze per il battaglione, si comporrà di muli

$$4000 : 100 = 40.$$

Oltre ai kg. 4000, la *terza* colonna deve portare (da *C* ad *E*) 40 razioni complete (di viveri e di foraggio) per la *quarta* e 2 di viveri per i due uomini fermi in *E*.

Il carico essendo perciò di kg.

$$4000 + (22 \times 40) + (2 \times 2) = 4000 + 880 + 4 = 4884,$$

i muli occorrenti saranno 49 (come se il carico fosse di kg. 4900).

Oltre ai kg. 4884, la *seconda* colonna deve portare (da *D* a *C*) 49 razioni complete per la *terza* e 2 di viveri per i due uomini fermi in *C*.

Il carico essendo perciò di kg.

$$4884 + (22 \times 49) + (2 \times 2) = 4884 + 1078 + 4 = 5966,$$

i muli occorrenti saranno 60 (come se il carico fosse di kg. 6000).

Oltre ai kg. 5966, la *prima* colonna deve portare (da *A* a *D*) 60 razioni complete per la *seconda* e 2 di viveri per i due uomini fermi in *D*.

Il carico essendo perciò di kg.

$$5966 + (22 \times 60) + (2 \times 2) = 5966 + 1320 + 4 = 7290,$$

i muli occorrenti saranno 73 (come se il carico fosse di kg. 7300).

Riassumendo, occorrono muli

$$40 + 49 + 60 + 73 = 222.$$

9. — Il maggiore ha ragione;—concluse il capitano — infatti, poichè a modo mio occorrevano 266 muli, se ne risparmiano

$$266 - 222 = 44.$$

— E rispetto al modo mio — soggiunse il tenente, sorridendo della propria ingenuità — l'economia è nientemeno che di muli $206 + 44 = 250$.

— Andiamo dal signor maggiore — disse il capitano, alzandosi.

— Un momento!—esclamò il tenente, persuaso d'aver trovato il modo per riabilitarsi — Ad ogni mulo, io facevo percorrere tutta la strada, lei metà ed il signor maggiore un quarto: ed ogni volta abbiamo trovato che il numero dei muli diminuiva. Proviamo allora a far che ogni mulo percorra soltanto un ottavo della strada.

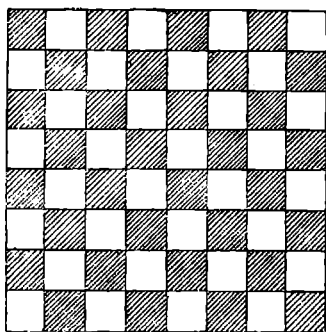
— E perchè non continuare nel frazionamento?—chiese, con lieve ironia, il capitano — Perchè non spezzare il cammino in 16 parti, in 32, ecc.?

— Mah! — disse il tenente, per non compromettersi, incominciando a temere di aver detto una sciocchezza.

— Il perchè glielo dico io. Quando ogni mulo fa il viaggio di andata *a carico completo* e *non porta alcuna scorta* (nè per sè, nè per il proprio conducente), che cosa vuole di più? Un maggiore frazionamento del cammino non le farebbe economizzare nè muli nè conducenti; ma aumenterebbe la fatica di questi, con vane operazioni di carico e scarico.

CAPITOLO VIII

ELEVAZIONE A POTENZA

§ 1. — I Quadrati

1. — La comune *scacchiera* è una tavoletta *quadrata*, di legno intarsiato a due colori (chiaro e scuro), composta di *quadratini* eguali (*caselle*).

I due giocatori si mettono di fronte e collocano la scacchiera in modo che ciascuno abbia alla propria *sinistra* una casella *chiara* o *scura*, secondochè giuocano a *dama* o a *scacchi*.

2. — Quante sono le caselle di una scacchiera?

Fra chiare e scure, ve ne sono 8 per *lato*.

Cioè, ve ne sono 8 *righe* (orizzontali), di 8 caselle ciascuna.

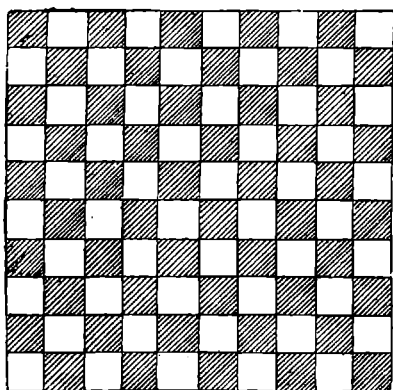
Perciò, il numero delle caselle è

$$8 \times 8 = 64.$$

Si può anche dire che ve ne sono 8 *colonne* (verticali), di8 caselle ciascuna.

3. — La *dama francese* viene giocata su una scacchiera che ha 10 caselle per lato.

Perciò, il numero delle sue caselle è

$$10 \times 10 = 100.$$

4. — Supponiamo che una *scacchiera francese* (senza tener conto dell'incorniciatura) occupi un m² (metro quadrato)

Ogni suo lato è un m. (metro)

Il lato di ogni sua casella è un dm. (decimetro)

Ogni sua casella è un dm². (decimetro quadrato)

5. — Si conclude che:

ogni m². è 100 dm².

6. — Supponiamo che una *scacchiera francese* occupi un dm².

Ogni suo lato è un dm.

Il lato di ogni sua casella è un cm. (centimetro)

Ogni sua casella è un cm². (centimetro quadrato)

7. — Si conclude che:

ogni dm². è 100 cm².

8. — Istessamente,

ogni cm². è 100 mm².

9. — Poichè $100 \times 100 = 10{\cdot}000$,

si conclude che:

ogni m^2. è 10·000 cm^2,

ed ogni dm^2. è 10·000 mm^2.

10. — Poichè $10{\cdot}000 \times 100 = 1{\cdot}000{\cdot}000$

si conclude che:

ogni m^2. è 1·000·000 di mm^2.

11. — Istessamente,

ogni dam^2. è 100 m^2.

ed ogni hm^2. è 100 dam^2.

12. — Quindi, poichè il dam^2. (decametro quadrato) si chiama anche *ara*,

l'hm^2. si chiama anche *ettaro* (cento are)

ed il m^2. si chiama anche *centiara* (centesima parte di un'ara).

13. — Sappiamo che il prodotto

$$8 \times 8$$

indica il *numero* dei *quadratini* che compongono un *quadrato*, allorchè ogni suo *lato* si compone dei lati di 8 *quadratini*.

14. — Perciò, si dice brevemente che

8×8 è il *quadrato* di 8.

15. — Lo si indica con la scrittura

$$8^2$$

di cui si dice che

8 è la *base* e 2 è l'*esponente*.

16. — Analogamente, ad es., si scrive

$$7^2 = 7 \times 7 = 49$$

e si dice:

7 al quadrato, fa 49.

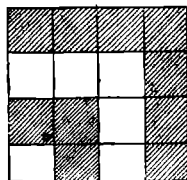
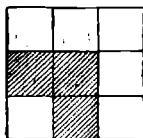
17. — Sicchè:
per calcolare il quadrato di un numero, lo si moltiplica per sè stesso.

18. — Ad es.,

$$0^2 = 0 \times 0 = 0 \qquad \text{ed} \qquad 1^2 = 1 \times 1 = 1.$$

19. — Da due cartoncini, uno bianco ed uno grigio, Carletto ha ritagliato alcuni *quadratini.*

Ne posa sulla tavola ***uno*** bianco e gliene mette ac-

canto 3 grigi, in modo da comporre *il quadrato di due.*

Poi, con altri 5 quadratini bianchi, compone *il quadrato di tre,*

con altri 7 quadratini grigi, compone *il quadrato di quattro,* ecc.

20. — Il giuoco di Carletto vi insegna a costruire *la successione dei quadrati* (dei numeri naturali), mediante *addizioni successive.*

Allo 0 aggiungendo successivamente *i numeri dispari*

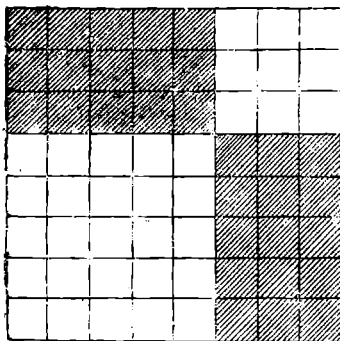
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 ...,

ottenete i numeri

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ....

cioè i valori di

0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2...

21. — Osservate il nuovo giuoco di Carletto.

Dapprima, con quadratini bianchi, egli ha composto *il quadrato di cinque.*

Poi, ha adoperato i quadratini grigi, mettendone:

sopra, 3 *righe* da 5,

e a destra, 5 *colonne* da 3.

Infine, con quadratini bianchi, ha composto *il quadrato di tre.*

E che cosa ha ottenuto?

Il quadrato di otto.

22. — Quanti quadratini compongono *il quadrato di cinque?*

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

E le 3 righe da 5?

$$5 \times 3 = 15$$

E le 5 colonne da 3?

$$3 \times 5 = 15$$

E *il quadrato di tre?*

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

23. — In tutto, quanti quadratini ha adoperato Carletto, per eseguire il suo giuoco?

$$25 + 15 + 15 + 9 = 64.$$

Ed infatti egli ha ottenuto ***il quadrato di otto,*** il quale (come la scacchiera comune) è composto di 64 quadratini.

24. — Si osservi che

$$5 + 3 = 8$$

ed inoltre

$$5 \times 3 = 3 \times 5$$

sicchè, invece di

$$(5 \times 3) + (3 \times 5)$$

si può scrivere

$$2\ (5 \times 3).$$

Con queste osservazioni, dal giuoco di Carletto si ricava che:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2\ (5 \times 3) + 3^2$$

od anche:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2 + 2\ (5 \times 3).$$

25. — Sicchè:

il quadrato della somma di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati, aumentata del loro doppio prodotto.

26. — Però, mentre per enunciare la *regola* riesce più comodo accennare da ultimo al *doppio prodotto,* invece nel *calcolo* riesce più comodo occuparsene sùbito dopo *il quadrato del primo addendo*

27. — Va bene, — dice Pierino; — ma, invece di

$$5^2 = 25 \qquad 2\ (5 \times 3) = 2 \times 15 = 30 \qquad 3^2 = 9$$

e

$$25 + 30 + 9 = 64,$$

io faccio più presto a calcolare

$$5 + 3 = 8 \quad \text{ed} \quad 8^2 = 64.$$

E Pierino ha ragione, in questo caso: perchè il quadrato di ogni numero di una cifra si trova nella tavola pitagorica, e perciò si deve sapere a memoria.

28. — Ma il procedimento indicato rende facilissimo *il calcolo mentale del quadrato di ogni numero di due cifre.*

A tale scopo, anzitutto, nella *base* del quadrato si staccano le *diecine* (complete) dalle *unità* (restanti).

Ad es.,

$$35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2(30\times5) + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$$

29. — Per addestrarsi, giova *dire* così:

30 al quadrato fa 900,
30 per 5 fa 150, il cui doppio è 300,
900 più 300 fa 1200,
5 al quadrato fa 25,
1200 più 25 fa 1225.

30. — Ora, per convincere Pierino dell' utilità della nostra regola, domandiamogli di *proseguire la successione dei quadrati* (dei numeri naturali), che abbiamo interrotta col 100 (quadrato di 10).

Egli ha imparato che basta seguitare ad *aggiungere* successivamente *i numeri dispari*, ma non rammenta *l'ultimo* adoperato e quindi non sa quale sia *il primo* che deve adoperare.

Ed ecco venire in soccorso di Pierino la regola che egli aveva giudicata inutile.

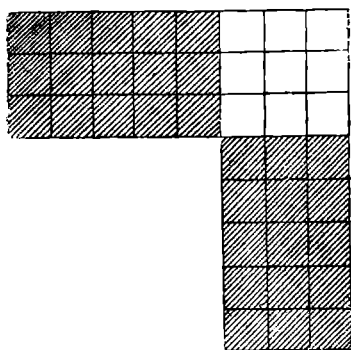
Per *proseguire*, egli deve incominciare dal *quadrato* di 11.

Ed egli lo può calcolare così:

$$11^2 = (10+1)^2 = 10^2 + 2(10\times1) + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121$$

Sicchè: *il numero dispari*, che gli occorreva, è il 21.

31. — Saputo ciò, Pierino prosegue subito così:

$$12^2 = 121 + 23 = 144,$$
$$13^2 = 144 + 25 = 169,$$
$$14^2 = 169 + 27 = 196,$$
$$15^2 = 196 + 29 = 225, \text{ ecc.}$$

32. — **Ma, intanto, Carletto ha messo da parte i quadratini bianchi, che componevano *il quadrato di cinque.***

E poi, egli si è divertito a spostare alcuni dei quadratini grigi, in modo da ottenere 3 colonne di 13 quadratini: sicchè il loro numero è

$$13 \times 3 = 39.$$

33. — Che cos'è questo numero?

è la *differenza* tra 64 (*quadrato* di 8) e 25 (*quadrato* di 5).

E come l'abbiamo ottenuto?

come *prodotto* di 11 (*somma* di 8 e di 5) per 3 (*differenza* tra 8 e 5).

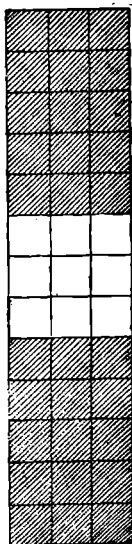
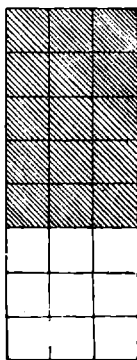
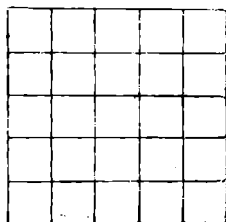
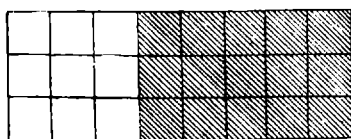
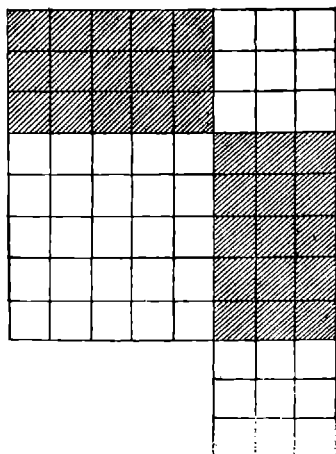
Si conclude che:

$$8^2 - 5^2 = (8 + 5)\ (8 - 5)$$

34. — Sicchè:

la differenza dei quadrati di due numeri è eguale al prodotto della somma per la differenza delle loro basi.

35. — Ad es.,

$$65^2 - 35^2 = (65 + 35)\ (65 - 35) =$$
$$= 100 \times 30 = 3000.$$

Per verifica (ed anche per confronto di rapidità), si calcolino separatamente i quadrati di 65 e di 35, e poi se ne trovi la differenza.

36. — Inversamente: *il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è eguale alla differenza dei loro quadrati.*

37. — Ad es.,

$113 \times 87 = (100 + 13)$
$(100-13) = 100^2 - 13^2 =$
$= 10{\cdot}000 - 169 = 9{\cdot}831$

38. — Frattanto, Carletto ha ricomposto *il quadrato di otto* ed, inoltre, gli ha costruito accanto *il quadrato di tre*, con altri quadratini bianchi.

In tutto, quanti quadratini ha adoperato?

$8^3 + 3^2 = 64 + 9 = 73$

Ma ora egli stacca le 3 righe in alto, di 8 quadratini; e poi anche le 3 colonne a destra, di 8 quadratini.

Così facendo, quanti quadratini ha tirato via?

$2 (8 \times 3) = 2 \times 24 = 48$

E quanti ne ha lasciati sulla tavola?

$$73 - 48 = 25.$$

Ed, infatti, i quadratini rimasti compongono *il quadrato di cinque.*

39. — Si conclude che:

$$(8 - 3)^2 = 8^2 + 3^2 - 2\,(8 \times 3)$$

od anche:

$$(8 - 3)^2 = 8^2 - 2\,(8 \times 3) + 3^2$$

40. — Sicchè:

il quadrato della differenza di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati, diminuita del loro doppio prodotto.

41. — A proposito del *quadrato di una differenza*, ripeto quanto ho detto a proposito del *quadrato di una somma*:

mentre per enunciare la *regola* riesce più comodo accennare da ultimo al *doppio prodotto*, invece nel *calcolo* riesce più comodo occuparsene sùbito dopo *il quadrato del sottraendo.*

Soggiungo però: in quanto lo si possa, come accade sempre nell'applicazione seguente (in cui il sottraendo non è minore del doppio del sottrattore).

42. — Allorchè si deve calcolare (mentalmente) *il quadrato di un numero di due cifre* e *la cifra delle unità è maggiore di cinque*, anzichè al quadrato di una *somma*, giova ricorrere al quadrato di una *differenza.*

A tale scopo, si *completa* la *diecina* della base e si indica di *togliere* le *unità* che si sono aggiunte.

43. — Per verifica e raffronto, ecco il calcolo del quadrato di 29, nei due modi:

$$(20 + 9)^2 = 20^2 + 2\,(20 \times 9) + 9^2 = 400 + 360 + 81 = 841$$
$$(30 - 1)^2 = 30^2 - 2\,(30 \times 1) + 1^2 = 900 - \ \ 60 + \ \ 1 = 841$$

44. — Allorchè deve *sviluppare* il *quadrato* di una *somma* o di una *differenza*, badi il mio giovane lettore di *non dimenticare il doppio prodotto.*

Alcuni sbadati, oltre a dimenticare così *uno* dei *tre termini* dello *sviluppo*, ripetono (fra i due quadrati) *il segno* (+ o —) adoperato nella *base.*

E scrivono *false eguaglianze* come queste:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$$
$$(5 - 3)^2 = 5^2 - 3^2.$$

45. — Ad uno scolaretto, che appunto così faceva, osservai ch'egli confondeva

il quadrato di una differenza
con *la differenza di due quadrati.*

— Non è *lo stesso?* — mi chiese ingenuamente.

— Press'a poco — replicai, celiando — come

lo zio della serva
e la serva dello zio.

— In questo caso — continuai, sorridendo — la distinzione è manifesta: non foss'altro, perchè lo zio è un *uomo* e la serva è una *donna.* Però, osserva altresì che, mentre

$$(5 - 3)^2 = 2^2 = 4$$
invece $$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

e riconosci che

4 non è *lo stesso* che 16.

Si arrese. Per il raffronto numerico o per il mio scherzo?

Nel dubbio, ve li ho riferiti entrambi: sperando che giovino anche a voi.

DOMANDE.

1. — Di quanti m^2. si compone un km^2.?
2. — Di quanti m^2. si compone un ettaro?
3. — Di quanti ettari si compone un km^2.?
4. — Di quanti dm^2. o cm^2. o mm^2. si compone un km^2.?
(Si rammenti che:

1·000·000 si legge un milione.
1·000·000·000 si legge un bilione *od «un miliardo»*,
1·000·000·000·000 si legge un trilione, *ecc.*)

5. — Se un lato di un quadrato è lungo 25 cm., quanti cm^2. compongono quel quadrato? e quanto è lungo il suo contorno?
(Quanti lati compongono il contorno di un quadrato?)

Esercizi

Calcolare mentalmente:

1. — i quadrati di

20 30 40 50 60 70 80 90 100.

2. — i quadrati di

21 32 43 54 65 74 83 92

(staccando, nella base, le diecine dalle unità).

3. — i quadrati di

16 17 18 19

(anzitutto, sviluppando il quadrato di 15 + 1 e rammentando che il quadrato di 15 è 225; trovato così il numero dispari che bisogna aggiungere al quadrato di 15 per ottenere il quadrato di 16, si prosegue, aggiungendo i numeri dispari successivi).

(In altro modo, si calcolino i quadrati delle differenze:

$$20-4 \qquad 20-3 \qquad 20-2 \qquad 20-1).$$

4. — le differenze

$$75^2-25^2 \qquad 67^2-33^2$$
$$52^2-32^2 \qquad 47^2-45^2$$

(decomponendo ciascuna nel prodotto della somma per la differenza delle due basi).

5. — i prodotti

$$(100+12)\,(100-12) \qquad (70+7)\,(70-7)$$

(trasformandoli in differenze di quadrati).

6. — i prodotti

$$51\times 49 \qquad 42\times 38$$
$$27\times 23 \qquad 104\times 96$$

(trasformando i due fattori nella somma e nella differenza di due stessi numeri, e poi trasformando il prodotto nella differenza di due quadrati).

7. — i quadrati di

29 38 47 56 69 78 87 96

(completando la diecina incompleta della base, togliendo le unità aggiunte e calcolando poi il quadrato della differenza).

Problemi

1. — Quanti ettari di terreno deve espropriare un comune, per costruire una carrozzabile lunga km. 7, con la massicciata larga 6 m. e con ciascuno dei due fossi laterali largo m. 2 al sommo delle sponde?

(Quanti dam. è larga e lunga la striscia di terra occorrente? di quanti dam^2. è composta? di quanti hm^2.?)

2. — Il signor Arnaldo possedeva un podere di 15 ha. (ettari). Un vicino gliene ha comperato 2 ha. e 7 a. (are), pagandogli L. 8500 all' ha.

Quanto ha ricavato dalla vendita il signor Arnaldo? e qual è attualmente l'estensione del suo podere?

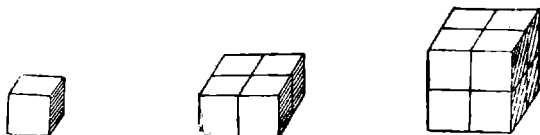
(Quante are ha venduto? a quanto all'ara? quanto ha ricavato? Quante are possedeva? quante gliene sono rimaste? cioè: quanti ha. completi e quante a. residue?)

§ 2. — I Cubi

1. — Carletto ha ricevuto in dono una scatola, la quale contiene 3 *strati*, di 5 *file*, di 8 *cubetti* di legno, tutti eguali.

Perciò, questi sono

$$8 \times 5 \times 3 = 40 \times 3 = 120.$$

2. — Egli ne posa 4 sulla tavola, in modo da comporre uno *strato quadrato*, sul quale poi colloca uno *strato quadrato* eguale.

Ottiene così un *cubo*, ogni *spigolo* del quale è composto di 2 spigoli de' suoi *cubetti*.

3. — Il *numero* dei *cubetti*, che lo compongono, è

$$4 + 4 = 8$$

od anche $$2 \times 2 \times 2 = 8.$$

4. — Perciò, si dice brevemente che

$$2 \times 2 \times 2 \text{ è il } \textit{cubo} \text{ di } 2.$$

Lo si indica con la scrittura

$$2^3$$

di cui si dice che

2 è la ***base*** e 3 è l'***esponente***.

5. — Sicchè:

per calcolare il cubo di un numero, se ne fa il quadrato e poi si moltiplica questo per il numero dato.

6. — Ad es.,

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 3^2 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$
$$4^3 = 4^2 \times 4 = 16 \times 4 = 64$$
$$5^3 = 25 \times 5 = 125 \quad \text{ecc}$$

Coi suoi cubetti, Carletto può comporre anche *il cubo di tre* ed *il cubo di quattro*, ma non di più.

7. — Ma noi possiamo imaginare facilmente *il cubo di dieci*, composto di 10 *strati quadrati*, di 10 *file* (righe o colonne), di 10 *cubetti*.

Sicchè:

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 10^2 \times 10 = 100 \times 10 = 1000$$

8. — Se fosse un m^3. (metro cubo), allora:
ogni suo spigolo sarebbe un m.,
lo spigolo di ogni cubetto sarebbe un dm.
ed ogni cubetto sarebbe un dm^3. (decimetro cubo)

9. — Si conclude che:

ogni m^3. è 1000 dm^3.

10. — Se invece *il cubo di dieci* fosse un dm^3, allora:
ogni suo spigolo sarebbe un dm.,
lo spigolo di ogni cubetto sarebbe un cm.
ed ogni cubetto sarebbe un cm^3. (centimetro cubo)

11. — Si conclude che:

ogni dm^3 è 1000 cm^3.

12. — Istessamente,

ogni cm^3 è 1000 mm^3.

DOMANDE

1. — Quanti litri in un m^3?

(Rammentiamo che un litro è un dm^3).

2. — Quanti hl. in un m^3?

3. — Quanti cm^3 in un litro?

4. — Quanto pesa un litro di acqua pura (distillata, alla temperatura di 4 gradi centigradi?)

(Rammentiamo che un cm^3 di acqua pura pesa un grammo.)

5. — Quanto pesa un m^3 di acqua pura?

(Si risponda in kg., in q., in t.)

6. — Quanti kg. pesa un m^3 di ghiaccio, un dm^3 del quale pesa g. 920?

7. — Quanto pesa un m^3 di acqua di mare, un litro della quale pesa un kg. e 26 g.?

(Quante t. complete e quanti kg. residui?)

8. — Un dm^3 di ghiaccio pesa più o meno di un dm^3 di acqua di mare? quanti g.?

(Ecco perchè il ghiaccio galleggia sulle acque dei fiumi ed ancor meglio su quelle dei mari.)

9. — Quanti cm^3 in un m^3?

10. — Quanti mm^3 in un dm^3? in un m^3?

Esercizi

1. — Calcolare mentalmente il cubo di

6 7 8 9

2. — Di quanti cm^3 si compone un cubo, il cui spigolo è 13 cm.? (Si scriva sùbito il quadrato di 13 e lo si moltiplichi per 13).

Problemi

1. — Tre orsi bianchi, che insieme pesavano kg. 424, si trovavano su un blocco di ghiaccio, nel momento in cui questo si è staccato da un grosso banco, nell'oceano artico.

Di quanti m³. almeno era quel blocco, poichè galleggiava malgrado il sovraccarico?

(Dalle *domande* 6 e 7 risulta quanti kg. pesa un m³ di acqua di mare e quanti un m³ di ghiaccio. Quant'è la differenza? Altrettanti kg. potrà portare un m³ di ghiaccio, pur galleggiando. Quindi ecc.)

2. — Quanto pesa una barra di ghiaccio artificiale, di 28 dm³? (Si risponda in kg. completi e g. residui.)

3. — Quanto pesa un cubo di granito, il cui spigolo è cm. 90, se ogni dm³ pesa kg. 2 ed hg. 7?

(Di quanti dm. è lo spigolo di quel cubo? di quanti dm³ è il suo volume? quanti hg. pesa ogni dm³ di quel granito? tutto il cubo? quanti kg. completi e quanti g. residui?)

4. — Un negoziante di legname deve ricevere da una segheria 16 t. di tavole di abete, altrettante di noce ed altrettante di quercia.

Prima di riceverle, egli vuol predisporre in magazzino il posto necessario.

Quanti m³?

(A tale scopo egli pesa separatamente un dm³ di abete, uno di noce ed uno di quercia, e trova che essi pesano dag. 60, 65. 75 Quanti dag. pesano insieme quei 3 dm³? quanti kg.? E, perciò quante t. peserebbero 3 m³ di quel legname, un m³ per qualità? Sicchè, quante volte 3 m³ ne sta per arrivare?)

§ 3. — Le altre potenze

1. — Abbiamo visto che una *somma* di quanti si vogliano *addendi eguali* si indica brevemente con una scrittura (prodotto) in cui si adoperano: *uno* di questi addendi (moltiplicando) ed il loro *numero* (moltiplicatore).

Similmente, un *prodotto* di quanti si vogliano *fattori* si indica brevemente con una scrittura (***potenza***) in cui si adoperano: *uno* di questi fattori (***base***) ed il loro *numero* (***esponente***).

2. — Però, mentre la moltiplicazione si indica col segno apposito « $\times$ », nessun segno indica la *elevazione a potenza*.

A questa mancanza supplisce la effettiva ***elevazione*** (sopra la riga) dell'*esponente* (che, inoltre, si scrive con caratteri più piccoli di quelli usati per la *base*).

3. — Ad es., invece di

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

si scrive 7^5

e si legge:

sette ***elevato*** cinque

od anche: sette ***alla*** quinta.

Mentre la *base* si legge sempre come numero *cardinale*, l'*esponente* invece viene letto come numero *cardinale* od *ordinale*, secondochè si usa la parola « elevato » od « alla ».

4. — Inoltre, mentre vi è uno speciale procedimento (che abitualmente si chiama appunto *moltiplicazione*), il quale evita la fatica di calcolare un *prodotto* come *somma*, dobbiamo rinunciare (almeno per ora) ad ogni speciale procedimento, il quale attenui la fatica (e lo spreco di tempo) di calcolare una *potenza* come *prodotto*.

5. — Le sole *potenze*, che non costino alcuna fatica, sono quelle di *base* 0, 1, 10.

Infatti, poichè

$$0 \times 0 = 0,$$

ogni potenza di zero vale zero.

Poichè $1 \times 1 = 1,$

ogni potenza di uno vale uno.

Poichè si moltiplica per 10, scrivendo uno 0 a destra del moltiplicando:
ogni potenza di dieci si ottiene, scrivendo la cifra 1 *ed alla sua destra tanti* 0 *quanti ne indica l'esponente.*

Sicchè, ad es.,

$$0^5 = 0 \qquad 1^5 = 1 \qquad 10^5 = 100{\cdot}000.$$

6. — I *quadrati* ed i *cubi* (che già conosciamo) sono le *potenze* con esponente *due* e *tre.*

Le *altre potenze* (cioè: quelle con esponente diverso da *due* e *tre*) non hanno nomi speciali, perchè non hanno applicazioni immediate in Geometria: il che non esclude che la loro conoscenza non abbia a riuscirci utilissima fra breve.

Ci accontenteremo di chiamarle:
terze potenze, quarte potenze, ecc.

7. — Calcoliamo, ad es., *la quinta potenza* di 7, cioè:
il prodotto di 5 *fattori eguali a* 7.

Abbiamo, successivamente:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 7 \times 7 = 49 \\ 7^3 &= 7^2 \times 7 = 49 \times 7 = 343 \\ 7^4 &= 7^3 \times 7 = 343 \times 7 = 2401 \\ 7^5 &= 7^4 \times 7 = 2401 \times 7 = 16807. \end{aligned}$$

8. — Dal calcolo fatto (e da ogni altro analogo) risulta che:
se si moltiplica una potenza per la base, si ottiene la potenza successiva (cioè: con *la stessa base* e con *l'esponente successivo*).

Quindi, inversamente:
se si divide una potenza per la base (diversa da zero), si ottiene la potenza precedente (cioè: con *la stessa base* e con *l'esponente precedente*).

Ad es.,

$$7^5 : 7 = 16807 : 7 = 2401 = 7^4.$$

Questa duplice regola costituisce *la legge di successione delle potenze* di uno stesso numero.

9. — Come ogni *somma* ha almeno *due addendi*, così ogni *prodotto* ha almeno *due fattori*.

Perciò, da principio, come i *moltiplicatori*, così gli *esponenti*, sono numeri non minori di 2.

Tuttavia, per evitare ogni eccezione, come ai *moltiplicatori* 0 ed 1, così venne attribuito un significato anche agli *esponenti* 0 ed 1.

E ciò venne fatto in modo che, anche per essi, valga *la legge di successione delle potenze.*

10. — Poichè dovremo applicar questa *a ritroso*, occupiamoci di *potenze* con *base diversa da zero* (altrimenti, non potremmo adoperare la base come *divisore*).

Una potenza con esponente 1, dovendo diventare *la precedente* di quella con esponente 2, dovrà potersi ricavare da questa, *dividendola* per la *base.*

Ma, col *dividere* una potenza con esponente 2 (cioè: il *prodotto* della *base* per sè stessa) per la *base* (che è uno dei due fattori), si ottiene (l'altro fattore, cioè) la *base.*

11. — Perciò, venne stabilito che:
ogni potenza con esponente 1 *sia eguale alla base.*

Ad es.,

$$7^1 = 7$$

12. — Una potenza con esponente 0, dovendo diventare *la precedente* di quella con esponente 1, dovrà potersi ricavare da questa, *dividendola* per la *base.*

Ma, col *dividere* una potenza con esponente 1 (cioè: la *base*) per la *base* (cioè per sè stessa), si ottiene 1.

13. — Perciò, venne stabilito che:
***ogni potenza con esponente* 0 *sia eguale ad* 1.**

Ad es.,

$$7^0 = 1$$

14. — La scrittura 7^1 si legge:

sette elevato uno
od anche: sette alla prima.

La scrittura 7^0 si legge soltanto:

sette elevato zero.

— E perchè non si potrebbe leggere: « sette alla zeresima »? — chiede Pierino.
— Si potrebbe, ma non usa.

15. — Riassumendo, ad es., *la successione* (senza fine) delle *potenze* di 7 incomincia così:

$7^0 = 1, \quad 7^1 = 7, \quad 7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401$, ecc.

16. — Risulta che, procedendo ordinatamente, bisogna eseguire una *prima moltiplicazione* per calcolare la *seconda potenza*, una *seconda moltiplicazione* per calcolare la *terza potenza*, una *terza moltiplicazione* per calcolare la *quarta potenza*, ecc.

Cioè: per calcolare *in tal modo* una *potenza* (con *base* diversa da 0, da 1 e da 10, e con *esponente* diverso da 0 e da 1), bisogna eseguire tante *moltiplicazioni* quant'è *l'esponente diminuito di uno*.

17. — Sicchè, ad es., per calcolare *in tal modo* una *diciasettesima potenza*, occorrono ben *sedici moltiplicazioni*.

Ma nel § seguente impareremo a ***diminuire il numero delle moltiplicazioni*** da eseguire per il calcolo di una ***potenza.***

Ad es., vedremo che, per calcolare una ***diciassettesima potenza, bastano cinque moltiplicazioni.***

Ma prima giova completare questo § con due osservazioni.

18. — L'*addizione* e la *moltiplicazione*, sono ***commutative*** (cioè: consentono ***lo scambio*** dell'*operando* con l'***operatore***).

La *elevazione* ***a potenza*** è ***commutativa***?

No. Invero, ad es.,

mentre $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$,

invece $3^2 = 3 \times 3 = 9$ [1]

19. — L'***addizione*** e la ***moltiplicazione*** sono ***associative*** (cioè: consentono che *due operatori successivi* vengano *associati* mediante ***l'operazione stessa***).

La *elevazione* ***a potenza*** è ***associativa***?

No. Invero, ad es.,

$$(5^2)^3 = 25^3 = 25^2 \times 25 = 625 \times 25 = 15{\cdot}625$$

Dopo ciò,

$$5^7 = 5^6 \times 5 = 15{\cdot}625 \times 5 = 78{\cdot}125$$
$$5^8 = 5^7 \times 5 = 78{\cdot}125 \times 5 = 390{\cdot}625$$

e quindi $5^{(2^3)} = 5^8 = 390{\cdot}625$

sicchè $(5^2)^3$ è diverso da $5^{(2^3)}$

---

[1] I soli due numeri (naturali), fra loro diversi, che si possano ***scambiare fra loro*** nell' ufficio di ***base*** e di ***esponente*** sono 2 e 4, per i quali si ha:

$$2^4 = 2^3 \times 2 = 8 \times 2 = 16 = 4 \times 4 = 4^2$$

Esercizi

Calcolare mentalmente le potenze:

1. — di 2, con esponenti da 0 a 12.

2. — di 3, con esponenti da 0 a 6.

§ 4. — Il calcolo delle potenze

1. — Anzitutto, per brevità, stabilisco di ***sottintendere i segni di moltiplicazione*** nei ***prodotti di potenze.***

Ad es., invece di $2^6 \times 3^2 \times 5^4$
scrivo:

$$2^6\ 3^2\ 5^4$$

2. — Si osservi, ad es., che

$$7^4\ 7^3\ 7^2 = (7 \times 7 \times 7 \times 7)\ (7 \times 7 \times 7)\ (7 \times 7) =$$
$$= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^9$$

sicchè:

$$7^4\ 7^3\ 7^2 = 7^9$$

dove *il nuovo esponente* è

$$4 + 3 + 2$$

3. — Segue, ad es., che

$$5^4\ 5^3 = 5^7$$

da cui $\qquad 5^7 : 5^3 = 5^4$

dove *il nuovo esponente* è

$$7 - 3$$

4. — Riassumendo:
il prodotto od il quoto di potenze, con una stessa base, è eguale a quella potenza, con la stessa base, che ha per esponente la somma o la differenza degli esponenti.

(Si enuncino separatamente le due regole).

5. — Naturalmente, l'*esponente del dividendo* dev'essere *non minore* dell'*esponente del divisore.*

Il che non esclude che sia *lo stesso.*

Ma, in questo caso, l'applicazione della regola non è vantaggiosa.

Ad es.,

$$4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0 = 1$$

come si trova immediatamente (perchè si divide un numero per sè stesso).

6. — Si osservi, ad es., che

$$7^3\,5^3\,2^3 = (7 \times 7 \times 7)\,(5 \times 5 \times 5)\,(2 \times 2 \times 2) =$$
$$= (7 \times 5 \times 2)\,(7 \times 5 \times 2)\,(7 \times 5 \times 2) =$$
$$= 70 \times 70 \times 70 = 70^3$$

dove *la nuova base* è

$$7 \times 5 \times 2$$

7. — Segue, ad es., che

$$9^5\,4^5 = 36^5$$

da cui $36^5 : 4^5 = 9^5$

dove *la nuova base* è

$$36 : 4$$

8. — Riassumendo:

il prodotto od il quoto di potenze, con uno stesso esponente, è eguale a quella potenza, con lo stesso esponente, che ha per base il prodotto od il quoto delle basi.

(Si enuncino separatamente le due regole).

9. — Per quanto precede, ad es.,

$$(10^5)^3 = 10^5\,10^5\,10^5 = 10^{5+5+5} = 10^{15} = 1{\cdot}000{\cdot}000{\cdot}000{\cdot}000{\cdot}000$$

dove *il nuovo esponente* è

$$5 \times 3$$

(ed il risultato si legge: *un quadrilione*).

10. — Sicchè:
ogni potenza di potenza è eguale a quella potenza, con la base primitiva, che ha per esponente il prodotto degli esponenti.

11. — Quanto ho detto, vale anche nel caso in cui qualche ***esponente*** sia ***zero*** od ***1 sottinteso.***

Infatti, ad es.,

$3^6 \; 3^0 = 3^6 \times 1 = 3^6$ come facendo $3^6 \; 3^0 = 3^{6+0}$
$4^5 \; 4 = 4^6$ come facendo $4^5 \; 4^1 = 4^{5+1}$
$8^4 : 8^0 = 8^4 : 1 = 8^4$ come facendo $8^4 : 8^0 = 8^{4-0}$
$5^3 : 5 = 5^2$ come facendo $5^3 : 5^1 = 5^{3-1}$
$7^0 \; 2^0 = 1 \times 1 = 1$ come facendo $7^0 \; 2^0 = (7 \times 2)^0$
$7^0 : 2^0 = 1 : 1 = 1$ come facendo $7^0 : 2^0 = (7 : 2)^0$
$(9^6)^0 = 1$ come facendo $(9^6)^0 = 9^{6 \times 0}$

12. — Soffermiamoci a rilevare che, in ciascuna delle ***cinque operazioni*** di cui ci siamo occupati sin qui (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevazione a potenza), ***è lecito lo scambio di due operatori successivi.***

13. — Ad es.,

$(30+3)+2 = 33+2 = 35$ e $(30+2)+3 = 32+3 = 35$,
$(30-3)-2 = 27-2 = 25$ e $(30-2)-3 = 28-3 = 25$,
$(30 \times 3) \times 2 = 90 \times 2 = 180$ e $(30 \times 2) \times 3 = 60 \times 3 = 180$,
$(30 : 3) : 2 = 10 : 2 = 5$ e $(30 : 2) : 3 = 15 : 3 = 5$.

$$(30^3)^2 = 27{\cdot}000^2 = 729{\cdot}000{\cdot}000$$

e
$$(30^2)^3 = 900^3 = 729{\cdot}000{\cdot}000.$$

14. — Le regole, che abbiamo trovato in questo §, consentono di ***diminuire il numero delle moltiplicazioni***, nel calcolo delle *potenze con esponente maggiore di tre*

(il qual *numero*, se non si ricorre a particolari artifici, è *l'esponente diminuito di uno).*

Esempi notevoli, di tale riduzione, avrà tosto il lettore, rispondendo ordinatamente alle *domande* che seguono, ciascuna delle quali va completata con quest'altra:

quante moltiplicazioni occorrono?

DOMANDE

Scelto per base *un numero qualunque, che cos'è:*

1. — *il* quadrato *del* quadrato?

2. — *il* prodotto *del* cubo *per il* quadrato?

3. — *il* quadrato *del* cubo?
(*ovvero «il cubo del quadrato», cioè «il prodotto delle potenze quarta e seconda»*)

4. — *il* prodotto *della* quarta potenza *per il* cubo?

5. — *il* quadrato *del* quadrato *del* quadrato?
(*cioè «il quadrato della quarta potenza»*)

6. — *il* cubo *del* cubo?

7. — *il* quadrato *della* quinta *potenza*?
(*ovvero «la quinta potenza del quadrato», ovvero «il prodotto della ottava potenza per il quadrato*)

8. — *il* prodotto *della* potenza ottava *per il* quadrato *e per la* base?

9. — *il* quadrato *del* quadrato *del* cubo?
(*ovvero «il quadrato del cubo del quadrato», ovvero «il cubo del quadrato del quadrato», cioè «il prodotto delle sue potenze ottava e quarta»*)

10. — *il* prodotto *delle sue potenze* ottava, quarta *e* prima?

11. — *il* quadrato *della sua* potenza settima?
(*ovvero «il prodotto delle sue potenze* ottava, quarta *e* seconda»)

12. — *il* prodotto *delle potenze* ottava, quarta, seconda *e* prima?
(*Per giungere a questo risultato, mediante un'operazione di meno, si può dividere la ottava potenza per la base, e poi moltiplicare il quoto per la potenza ottava.*)

13. — *il* quadrato *del* quadrato *del* quadrato *del* quadrato?
(*cioè «il quadrato della ottava potenza»*)

14. — *il* prodotto *delle potenze* sedicesima *e* prima?

Esercizi

Semplificare, senza calcolare:

1\. — $18^6 \; 18^4$

2\. — $18^5 \; 18^0 \; 18^4 \; 18$

3\. — $18^{13} : 18^3$

4\. — $18^{10} : 18^0$

5\. — $2^{10} \; 9^{10}$

6\. — $3^{10} \; 2^{10} \; 3^{10}$

7\. — $6^7 \; 3^9 \; 6^3 \; 3$

8\. — $90^{10} : 5^{10}$

9\. — $(18^2)^5$

10\. — $(18^5)^2$

Semplificare e poi calcolare:

1\. — $8^2 \; 5^2$

2\. — $15^3 \; 2^3$

3\. — $12^7 : 12^5$

4\. — $56^2 : 7^2$

5\. — $22^4 : 11^4$

6\. — $39^3 : 13^3$

7\. — $(5^8 : 5^5) \; (2^5 : 2^2)$

8\. — $(37^5)^3 : (37^7)^2$

9\. — $(3^5 \; 7^2)^2 : (3^2 \; 7)^4$

10\. — $(2^3 \; 3^2 \; 5)^2 : (2^4 \; 3^3 \; 5^2)$

Calcolare col minimo numero di operazioni:

1\. — 3^4

2\. — 3^6

3\. — 1^{15}

4\. — 2^4

5\. — 2^8

6\. — 2^{15}

Giuochi

1\. *Un triangolo magico a sorpresa.*

È quello che avete conosciuto a pag. 46, perchè esso rimane *magico* (cioè: in ogni *lato*, la *somma* dei quattro numeri è la *stessa*) anche *elevando a quadrato* ciascun suo numero.

2\. — ***Qual è la somma dei numeri della tavola pitagorica?***

Addizionando separatamente i numeri d'ogni riga:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 9\,(10 : 2) = 45,$$
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 18 = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 2 \times 45, \quad \text{ecc.}$$
$$9 + 18 + 27 + \ldots + 81 = 9 \;\; 1 + 2 + 3 + \ldots 9) = 9 \times 45.$$

E quindi la *somma* cercata è:

$$45 + (2 \times 45) + (3 \times 45) + \ldots + (9 \times 45) = 45\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) =$$
$$= 45 \times 45 = 45^2 = (90 : 2)^2 = 8100 : 4 = 2025.$$

CAPITOLO IX

DIVISIBILITÀ

§ 1. — I divisori più comodi

1. — Il signor Gervasio, proprietario di una fabbrica di calze, riceve da un esportatore una buona ordinazione di calze da uomo: 150 dozzine (di paia) nere e 60 dozzine per ciascuno dei 6 colori e disegni, indicati nel campionario con le lettere B, C, F, L, P, S.

Sono, in tutto, *dozzine*:

$$150 + (60 \times 6) = 150 + 360 = 510$$

che andranno riposte in altrettante *scatole* di cartone.

2. — Ma una lieve preoccupazione turba la contentezza del signor Gervasio.

Abitualmente, egli fa eseguire le spedizioni in *casse* di legno, contenenti 24 scatole: collocate in 2 strati, di 3 file da 4.

In questo caso, oltre a 21 casse solite, occorrerebbe una cassetta da 6 scatole.

```
510 | 24
 30 | 21
  6
```

Invece, egli preferirebbe mandare casse tutte eguali, contenenti uno stesso numero di scatole.

E, ragionando fra sè, cerca il modo di raggiungere l'intento.

3. — Potrei mandare 51 casse da 10 scatole, ma non mi conviene: il gran numero di casse accrescerebbe fortemente la spesa di imballaggio, che ho compresa nel prezzo.

Piuttosto, 10 casse da 51 scatole. Ma, in ogni cassa bisognerebbe mettere un solo strato di scatole, in 3 file da 17, e le casse risulterebbero troppo basse e troppo lunghe.

Ah! ho trovato.

Manderò 17 casse da 30 scatole: da collocare in 2 strati, di 3 file da 5.

510	30
210	17
0	

4. — Il fatto, ad es., che il *resto* di 510 per 30 è *zero*, si esprime altrimenti dicendo che

510 è ***divisibile*** per 30

ovvero che

30 è un ***divisore*** di 510,

a seconda dell'ordine in cui piace di nominare i due numeri.

5. — Ad es., 10 è *divisibile* per 1, 2, 5, 10
e i *divisori* di 9 sono 1, 3, 9.

6. — Io chiamo «*fattore* di un numero» ogni suo *divisore*, che sia però *diverso* dal numero stesso e da 1.

Ad es., *i fattori* di 10 sono 2 e 5
ed *il fattore* di 9 è 3.

7. — Il caso occorso al signor Gervasio porge esempio di una questione, la quale si può risolvere soltanto con un *fattore* di un numero dato.

La ricerca di un tale *fattore* (se c' è) può costringere a *tentativi* numerosissimi, ma *non infiniti*: perchè i numeri da sperimentare devono essere *minori* del numero dato.

8. — Tuttavia, a rendere meno laboriosa tale ricerca, giova conoscere alcune ***regole pratiche***, le quali servono a decidere immediatamente se un numero dato sia o no *divisibile*:

per 10 e sue potenze,

per 2 o per 5 (cioè: i fattori di 10) e loro potenze,

per 9 (cioè: il precedente di 10) od almeno per 3 (cioè: il fattore di 9)

e per 11 (cioè: il successivo di 10).

9. — Anzitutto, sappiamo che un numero naturale è *divisibile* per 10 o per 100 o per 1000 ecc., quando termina con *tanti zeri* (almeno) quanti ne ha il *divisore* considerato.

Ad es., 123·000 è divisibile per 10, per 100, per 1000 e non per 10·000.

10. — Il *perchè* delle *regole* seguenti potrà essere più facilmente *spiegato* nel sèguito.

Per adesso, il mio giovane lettore si accontenti di imparare a servirsene.

11. — Ogni numero naturale si dice ***pari*** o ***dispari*** secondochè *è* o *non è* divisibile per *due*.

Sono *pari* i cinque *numeri di una cifra*

0 2 4 6 8

ed i *numeri* che *terminano* con una di esse.

Sono *dispari* i cinque *numeri di una cifra*

1 3 5 7 9

ed i *numeri* che *terminano* così.

Ad es., 890 è *pari* e 345 è *dispari*.

12. — Sono *divisibili* per 5 le *cifre*

0 5

ed i *numeri* che *terminano* così.

Ad es., 890 e 345 sono *divisibili* per 5.

13. — Riassumendo:

sono *divisibili* per 2 o per 5 i numeri, la cui *ultima cifra* è *divisibile* per 2 o per 5.

14. — Sono *divisibili* per 4 o per 25 (cioè: per le *seconde potenze* di 2 e di 5) i numeri, le cui *ultime due cifre* formano un numero *divisibile* per 4 o per 25.

Ad es., 1924 è *divisibile* per 4, perchè 24 è divisibile per 4,
e 3675 è *divisibile* per 25, perchè 75 è divisibile per 25.

15. — Sicchè, i numeri divisibili per 25 terminano in uno di questi 4 modi:

00 25 50 75.

Ed i numeri divisibili per 4 terminano in uno dei 25 modi:

00 04 08 12 ... 92 96.

16. — Sono *divisibili* per 8 o per 125 (cioè: per le *terze potenze* di 2 e di 5) i numeri, le cui *ultime tre cifre* formano un numero *divisibile* per 8 o per 125.

Ad es., 535·424 è *divisibile* per 8, perchè 424 è divisibile per 8,
e 284·375 è *divisibile* per 125, perchè 375 è divisibile per 125.

17. — Sicchè, i numeri divisibili per 125 terminano in uno degli 8 modi:

000 125 250 375 500 625 750 875.

Ed i numeri divisibili per 8 terminano in uno dei 125 modi:

000 004 008 012 ... 976 984 992.

18. — Sono ***divisibili*** per 3 o per 9 i numeri, la cui ***somma delle cifre*** è ***divisibile*** per 3 o per 9.

Ad es., dovendo decidere se 456·789 sia o no divisibile per 3 o per 9, si ***addizionano le cifre*** così:

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39.$$

Poichè 39 è divisibile per 3 e non per 9, anche 456·789 è ***divisibile*** per 3 e non per 9.

19. — Ma — domanda Pierino — come farebbe a concludere, chi non sapesse che 39 è divisibile per 3 e non per 9?

— Potrebbe applicare la regola stessa, cioè ***addizionare le cifre***, così:

$$3 + 9 = 12$$

ed osservare che 12 è divisibile per 3 e non per 9.

— Ma, se quel tale non sapesse neppure che 12 è divisibile per 3 e non per 9?

— Potrebbe applicare nuovamente la regola stessa, cioè ***addizionare le cifre***, così:

$$1 + 2 = 3$$

e finalmente si accorgerebbe che 3 è divisibile per 3 e non per 9.

20. — Più comodamente, di mano in mano che si addizionano le cifre, si possono ***trascurare*** i 9 e ***addizio-***

nare le cifre della somma, appena questa diventa un numero di due cifre.

Ad es., nel caso considerato del 456· 789, si può dire:

4 più 5 fa 9 (che si trascura),
6 più 7 fa 13, in cui 1 più 3 fa 4,
4 più 8 fa 12, in cui 1 più 2 fa 3.

Quindi (trascurando il 9 finale), si ottiene 3 e si conclude che 456· 789 è divisibile per 3 e non per 9.

21. — Senza eseguire la divisione, voglio sapere, ad es., se 6·471·839 sia o no *divisibile* per 11.

A questo scopo, *addiziono le cifre una sì ed una no*, così:

$$6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

e poi *addiziono le cifre saltate*, così:

$$4 + 1 + 3 = 8.$$

Se *la differenza delle due somme* è *divisibile* per 11, anche il numero che si sta esaminando è *divisibile* per 11.

Nel caso nostro,

$$30 - 8 = 22$$

e 22 è divisibile per 11.

Quindi, 6· 471· 839 è *divisibile* per 11.

22. — Ma — domanda l'implacabile Pierino — come farebbe a concludere, chi non sapesse che 22 è divisibile per 11?

— Aspetta due minuti e te lo dirò.

23. — Se applichiamo la nostra regola al numero

123· 406· 789

troviamo:

$$1 + 3 + 0 + 7 + 9 = 20$$
$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$
$$20 - 20 = 0$$

Poichè 0 è *divisibile* per qualunque numero, e quindi anche per 11, concludiamo che il numero proposto è *divisibile* per 11.

24. — In particolare, ogni numero, formato con *due cifre eguali*, è *divisibile* per 11.

25. — E torniamo a Pierino.

Ma Pierino ha già capito... come si faccia a capire che 22 è divisibile per 11.

26. — Egli, invece, mi chiede di aiutarlo a superare un'altra difficoltà.

— Per applicare la regola ad un numero che *certamente* fosse *divisibile* per 11, ho scritto un numero qualunque — egli dice — ad es., 1663, e l'ho *moltiplicato* per 11.

$$\begin{array}{r} 1663 \\ 11 \\ \hline 1663 \\ 1663 \\ \hline 18293 \end{array}$$

Dopo ciò, ho calcolato:

$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$8 + 9 = 17.$$

Ora, da 6 dovrei togliere 17, ma non si può.

— Ma — gli rispondo — dicendo di calcolare *la differenza delle due somme*, espressamente non ho precisato l'*ordine* in cui si deve adoperarle.

Quindi, allorchè le due somme sono fra loro diverse, sempre dalla *maggiore* si deve *sottrarre* la *minore*. Hai capito?

— Sì, signore — risponde Pierino. — Poichè

$$17 - 6 = 11$$

ci si accorge che 18·293 è *divisibile* per 11.

27. — Benissimo. Però, se un'altra volta dovrai moltiplicare un numero per 11, non imbrattare tanta carta.

— E come devo fare?

— Il tuo *moltiplicando* era 1663.

Ora, procedendo *da destra a sinistra*, avresti potuto scrivere *soltanto* il *prodotto*, pensando così:

copio il	3
3 più 6 fa	9
6 più 6 fa 12, porto 1 e scrivo	2
6 più 1 fa 7, ed 1 di riporto fa	8
copio l'	1
ed ottengo il prodotto	18293.

DOMANDE

1. — Come devono essere due numeri naturali, affinchè la loro somma o la loro differenza sia pari? dispari?

2. — Come devono essere due numeri naturali, affinchè il loro prodotto sia pari? dispari?

3. — Un numero, non divisibile per 2, può essere divisibile per 4? non divisibile per 4, può essere divisibile per 8? non divisibile per 3, può essere divisibile per 9? non divisibile per 5, può essere divisibile per 25? non divisibile per 25, può essere divisibile per 125?

4. — Il numero 27·324 è divisibile per 2? per 4? per 8? per 3? per 9? per 11?

5. — Il numero 97·350 è divisibile per 2? per 4? per 5? per 25? per 125? per 3? per 9? per 11?

6. — Quale cifra bisognerebbe scrivere al posto dello 0, affinchè il numero 9·473·620 diventasse divisibile per 8? per 9? per 11? per 125?

§ 2. — La prova del 9

1. — Scrivo un numero qualunque e lo divido per 9.

```
2543822 | 9
 74       282646
  23
   58
    42
     62
      8
```

2. — Se la divisione fosse stata eseguita col solo scopo di conoscere *il resto*, e non il quoziente, si poteva evitare il calcolo di questo e trovare *i resti parziali*

7 2 5 4 6 8

mediante *addizioni successive*, così:

2 più 5 fa 7,
7 più 4 fa 11, in cui 1 più 1 fa 2,
2 più 3 fa 5,
5 più 8 fa 13, in cui 1 più 3 fa 4,
4 più 2 fa 6,
6 più 2 fa 8.

3. — Il *procedimento abbreviato* è quello stesso che abbiamo adoperato per cercare se un numero sia o non sia divisibile per 9.

Anzi, quanto ho detto ora serve a confermare la esattezza di quel procedimento.

Infatti, se ora avessi scelto un numero divisibile per 9, avrei trovato il resto 0, tanto con la divisione, quanto col procedimento abbreviato.

4. — Senza curarmi dei *resti parziali*, addiziono le cifre del numero dato:

$$2 + 5 + 4 + 3 + 8 + 2 + 2 = 26$$

ed osservo che

$$\begin{array}{r|l} 26 & 9 \\ \hline 8 & 2 \end{array}$$

5. — Concludo che:
un *numero* qualunque e *la somma delle sue cifre*, separatamente *divisi* per 9, danno *resti eguali*.

6. — Eccovi, a *sinistra*, un' *addizione* eseguita da Fa-

bio e, a destra, una colonnina di cifre che mi ha servito ad accorgermi che quell'addizione era *sbagliata*.

87654	3
9123	6
40681	1
8370	0
257	5
145985	6

A *destra* di ogni *addendo*, ho scritto il suo *resto* per 9, che avete già imparato a calcolare; e, *sotto* a quei *resti*, ho scritto *il resto* per 9 della loro *somma*.

Infine, ho calcolato *il resto* per 9 della *somma* trovata da Fabio, ottenendo 5.

Poichè esso è *diverso* da quello che sta scritto in basso della colonnina a destra, ho concluso che l'*addizione* eseguita da Fabio è *sbagliata*.

7. — Trovate voi l'*errore*, rifacendo l'addizione.

Osserverete che *il resto* per 9 della *somma*, da voi corretta, è 6.

8. — E così avete imparato «la ***prova del 9*** per l'***addizione***».

9. — A questo punto, è necessaria un'*avvertenza*.

Se la *prova* è eseguita esattamente e se risultano *diversi* fra loro *i due resti* per 9 (della *somma dei resti* e della *somma* calcolata), allora abbiamo la *certezza* che in questa v'è qualche *errore*.

Ma, se *i due resti* risultano *eguali* fra loro, *non abbiamo la certezza* che l'*addizione* sia stata *bene eseguita*. Perchè, ad es., se in questa fosse stato scritto un 9 invece di uno 0, o viceversa, la *prova* non ci avvertirebbe di questo errore.

10. — Fabio doveva poi *moltiplicare* per 427 la somma da lui calcolata.

Eccovi, a *sinistra*, la sua *moltiplicazione*:

145985	5
427	4
1021895	2
291970	
583940	
62335595	

A *destra* di ciascun *fattore*, ho scritto il suo *resto* per 9. Avevo già calcolato il resto 5 del *moltiplicando* e sùbito (trascurando 2 e 7, la cui somma è 9) ho ottenuto *il resto* 4 del *moltiplicatore*.

Poi, *sotto*, ho scritto *il resto* per 9 del *prodotto dei resti*:

5 per 4 fa 20, in cui 2 più 0 fa 2.

Infine, ho calcolato *il resto* per 9 del *prodotto* trovato da Fabio, ottenendo *ancòra* 2.

11. — Così facendo, ho eseguito « la ***prova del 9*** per la ***moltiplicazione*** ».

12. — L'esito della *prova* è stato *favorevole*.

Ma, come ho spiegato a proposito dell'addizione, ciò rende *probabile*, ma non *certa*, la *esattezza* dell'*operazione* sottoposta alla prova.

Quindi, affido a voi *il giudizio definitivo*, invitandovi a rifare la moltiplicazione.

13. — Michele doveva eseguire *le medesime due operazioni successive* ed ha fatto così:

87654	3	146085	6
9123	6	427	4
40681	1	1022595	6
8370	0	292170	
257	5	584340	
146085	6	62378295	

A *destra* di ciascuna delle due operazioni, ho scritto la sua *prova* del 9.

La prova dell'*addizione* è la stessa di poc' anzi; ma questa volta il suo esito è *favorevole*, come risulta dal calcolo del *resto* per 9 della *somma* trovata da Michele.

E questa volta *entrambe le prove* hanno avuto *esito favorevole*, perchè i *resti* per 9, della *somma* e del *prodotto* calcolati da Michele, sono entrambi 6, come dev'essere.

14. — Malgrado l'esito *favorevole* delle *due prove*, ho rifatte le *due operazioni* e (ve lo dico, per evitare a voi questo lavoro) le ho trovate esatte.

15. — Supponete che il lavoro di Michele venisse esaminato prima di quello di Fabio.

Un correttore affrettato, sapendo *bene eseguite* da Michele le due operazioni e vedendo che Fabio ha trovato *risultati diversi* per entrambe, potrebbe concludere che Fabio le ha *sbagliate entrambe*.

Invece, voi sapete che ha sbagliato soltanto la prima. *Scolasticamente*, ha commesso *un solo errore* e perciò non va giudicato troppo severamente.

Ma, per indurvi ad essere meno indulgenti verso voi stessi che non sia l'insegnante, vi faccio osservare che, *praticamente*, anche *un solo errore* può avere conseguenze funeste.

16. — Imaginate, ad es., che Fabio fosse il cassiere di una Banca e che il risultato finale delle due operazioni esprimesse *lire*, che quella Banca doveva *ricevere* da un'altra.

Il fatto sta che, invece di	L.	62·378·295
Fabio si accontentava di	»	62·335·595
con una perdita, nientemeno, di	»	42·700

Questa *perdita* sarebbe derivata da *un solo errore* di Fabio: ma, se non si fosse mai scoperta, avrebbe danneggiato fortemente la Banca; e, se invece fosse stata scopèrta, avrebbe potuto far perdere il posto a Fabio.

17. — Per non rattristarci troppo, giova imaginare che il cassiere dell'altra Banca fosse Michele: il quale, avendo fatti i suoi calcoli esattamente ed essendo un galantuomo, abbia sùbito avvertito il collega dell'errore, evitandogli ogni conseguenza dannosa.

18. — L'operazione, che Pierino ha sott'occhio, lo induce a chiedere se vi sia anche « la ***prova del 9*** per la ***sottrazione*** ».

C'è, ma *indiretta*.

E cioè: si sottopone alla *prova* del 9 l'*addizione* che *si dovrebbe fare* come *prova naturale* della *sottrazione*.

19. — Ad es., la *prova* del 9, della *sottrazione* dianzi eseguita, si fa così:

il resto per 9 della *differenza* è 4
quello del *sottrattore* è 2
e quello della *somma dei resti* è 6
sicchè, anche quello del *sottraendo* dev'essere 6.

Così accade e perciò l'esito della *prova* è *favorevole*.

20. — Anche « la ***prova del 9*** per la ***divisione*** » si eseguisce con procedimento *indiretto*.

E cioè: si sottopongono alla *prova* del 9 la *moltiplicazione* e *l'addizione* che *si dovrebbero fare* come *prova naturale* della *divisione*.

21. — Ad es., ecco a *sinistra* una *divisione*:

86420	7531	7
11110	11	2
3579		5
		6
		2

A *destra*, in colonna, stanno i *resti* per 9 del *divisore*, del *quoziente*, del loro *prodotto*, del *resto* (della divisione a sinistra) e della *somma* degli ultimi due resti.

Poichè anche il *resto* per 9 del *dividendo* è 2, l'esito della *prova* è *favorevole*.

Esercizio

Dividere 987 654·321 per 123·456·789 e poi assoggettare la divisione alla prova del 9.

§ 3. — I numeri primi

1. — Si dice che un numero naturale, maggiore di 1, è *primo* quando è divisibile *soltanto* per 1 e per sè stesso [1].

Ad es., 5 è *primo* (perchè è divisibile soltanto per 1 e per 5) ed invece 6 *non* è *primo* (perchè, oltre che per 1 e per 6, è divisibile per 2 e per 3).

2. — Il minimo numero naturale, maggiore di 1, è 2, che è primo.

Dunque: *il minimo numero primo* è 2.

3. — Ogni numero *primo*, diverso da 2, è *dispari*.

Altrimenti, essendo maggiore di 2 e divisibile per 2, non sarebbe primo.

4. — Ogni numero *primo*, diverso da 5, non può terminare con 5.

Altrimenti, essendo maggiore di 5 e divisibile per 5, non sarebbe primo.

[1] Più brevemente: quando *è privo di fattori* (dando alla parola *fattore* il significato che le ho attribuito nel § 1, n. 6, di questo Cap.).

5. — Si conclude che:
ogni numero *primo*, diverso da 2 e da 5, *termina* con una delle cifre 1, 3, 7, 9.

6. — Si dimostra che, *dato un numero primo*, si può sempre trovarne uno *maggiore*.

Sicchè: *la successione dei numeri primi è infinita.*

7. — Quindi, bisogna accontentarsi di conoscerne alcuni.

Ecco, ad es., la

TAVOLA DEI NUMERI PRIMI fra 1 e 1000

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

8. — Non si conosce alcuna *legge di successione* dei *numeri primi.*

Ad es., esaminiamo *la successione delle differenze* tra ciascun numero primo (a cominciare da 3) ed il suo precedente :

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4,...

Dopo la prima, sono tutte *pari* (perchè *differenze* di numeri *dispari*).

Ma, all'infuori di ciò, esse si susseguono in un modo che, per essere da noi ignorato, ci appare capriccioso.

Ad es., per incontrare la *prima volta* la differenza 8, bisogna giungere ai numeri 359 e 367 ; e frattanto si incontra *cinque volte saltuarie* la differenza 10 (fra 139 e 149, fra 181 e 191, fra 241 e 251, fra 283 e 293, fra 337 e 347), *due volte consecutive* la differenza 12 (fra 199 e 211, fra 211 e 223) e *tre volte saltuarie* la differenza 14 (fra 113 e 127, fra 293 e 307, fra 317 e 331).

9. — Dirò ***composto*** ogni numero naturale, maggiore di 1, che *non sia primo.*

10. — Osservate, ad es., in qual modo io ***decomponga in fattori primi*** il numero 235·290, ricorrendo alle ***regole di divisibilità*** per 2, 3, 5, 11.

Alla *destra* del numero dato, segno un tratto *verticale*, al di là del quale scriverò (in righe successive) *i fattori primi* cercati.

Poichè il numero dato è *divisibile* per 2, scrivo a destra il divisore 2 e, sotto, il quoto 117645.

Poichè questo numero è *divisibile* per 3, scrivo a destra il divisore 3 e, sotto, il quoto 39215.

235290	2
117645	3
39215	5
7843	11
713	23
31	31
1	

Poichè questo numero è *divisibile* per 5, scrivo a destra il divisore 5 e, sotto, il quoto 7843.

Sin qui ho potuto adoperare ordinatamente i divisori primi 2, 3, 5.

Non avendovi indicata alcuna *regola di divisibilità* per 7, a parte divido 7843 per 7.

7843	7
8	1120
14	
3	

Ottengo un resto diverso da 0 e quindi procedo a sperimentare altri divisori primi.

Poichè 7843 è *divisibile* per 11, scrivo a destra il divisore 11 e, sotto, il quoto 713.

Poichè 713 è *minore* di 1000, guardo se esso si trovi nella nostra *tavola di numeri primi.*

Non c'è. Allora, lo divido separatamente per i *numeri primi successivi* 13, 17, 19, 23,... sino a trovarne uno (che vi dev'essere) per il quale il *resto* sia 0.

713	13	713	17	713	19	713	23
63	54	33	41	143	37	23	31
11		16		10		0	

Poichè 713 è *divisibile* per 23, scrivo a destra il divisore 23 e, sotto, il quoto 31.

Poichè 31 è *primo*, lo scrivo a destra e, sotto, scrivo *il quoto 1*, col quale deve *terminare* la *decomposizione* di qualunque numero.

Concludo che:

$$235 \cdot 290 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 23 \times 31.$$

11. — Dall'esempio risulta che la *decomposizione* di un numero composto può essere molto laboriosa.

A volte lo può esser tanto, da mettere a dura prova la pazienza del calcolatore.

Così accadrebbe, ad es., se doveste *decomporre* il numero 988· 027.

Sperimentando successivamente, come *divisori*, i numeri *primi* della nostra *tavola*, sino al 983, trovereste sempre *resti diversi da zero* e probabilmente vi stanchereste prima di giungere alla *divisione esatta*:

988027	991
9612	997
6937	
0	

— E come lo sapeva lei? — chiede Pierino.

— Molto semplicemente: avevo calcolato il prodotto di 997 per 991 e senza neppure eseguire la moltiplicazione, così:

$$(1000-3)\ 991 = 991{\cdot}000 - 2{\cdot}973 = 988{\cdot}027.$$

12. — Peggio andrebbe, se doveste *decomporre* 1009. Invero, dopo aver sperimentato invano tutti i numeri *primi* della nostra *tavola*, non sapreste che cosa concludere.

Senonchè, eseguita la divisione per 31, io osservo che il *quoziente* ottenuto, 32, è *minore* di 37, cioè del *nuovo divisore primo* che dovrei sperimentare.

1009	31
79	32
17	

Non mi occorre di più, per comprendere *l'inutilità* di altri tentativi e per concludere che:

1009 *è un numero primo.*

13. — E così farete ogni qualvolta dovrete *decidere* se un numero, *maggiore* di quelli della nostra *tavola*, sia o non sia *primo.*

14. — Risulta, inoltre, che la *decomposizione* di un numero non riesce troppo laboriosa, allorchè *il penultimo fattore primo* appartiene alle *prime diecine* e *l'ultimo* appartiene alla *tavola.*

A vostra quiete, negli Es. che vi propongo, il penultimo fattore primo non supera mai il 23.

15. — State però bene attenti, dopo aver trovato un fattore *primo*, a *non trascurare* di esaminare se il *quoto* sia o non sia *ancora divisibile* per quel *medesimo numero primo.*

Ad es., il numero da *decomporre* sia 20·923.

Poichè esso non è divisibile nè per 2, nè per 3, nè per 5, si prova a dividerlo per 7.

La divisione riesce esatta ed il quoto è 2989.

20923	7
2989	7
427	7
61	61
1	

Giunti a questo punto, *bisogna* esaminare se il quoto ottenuto sia o non sia divisibile per 7.

La divisione riesce esatta ed il nuovo quoto è 427.

Ed ancora *bisogna* esaminare se il nuovo quoto sia o non sia divisibile per 7.

La divisione riesce esatta ed il suo quoto è 61, che è *primo.*

Si conclude che:

$$20 \cdot 923 = 7^3\, 61.$$

16. — Se, ottenuto il primo quoto, 2989, sbadatamente si trascurasse di sperimentare nuovamente il divisore 7, non si giungerebbe neppure a scoprire il fattore primo 61.

Infatti, si procederebbe a sperimentare *invano* i divisori 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53. Ed osservando l'ultima di queste divisioni, poichè il quoziente, 56, è *minore* di 59, che è il numero primo immediatamente successivo a 53, si sarebbe tratti ad interrompere la ricerca, per concludere *erroneamente* che 2989 è primo!

2989	53
339	56
21	

17. — Con un po' d' attenzione, sovente si riesce ad eseguire una *decomposizione* molto rapidamente.

Ad es., il numero proposto sia 1·474·200.

Poichè termina con 00, esso è divisibile per 100, cioè per 2^2 5^2.

Il quoto 14742 è pari; lo divido per 2.

Nel quoto 7371, la somma delle cifre è 18. Perciò, lo divido per 9, cioè per 3^2.

Il quoto 819 è ancora divisibile per 9.

Infine, so che 91 è 7 per 13.

Sicchè, rammentando la regola per *il prodotto di potenze con una stessa base,* concludo che:

1474200	2^2 5^2
14742	2
7371	3^2
819	3^2
91	7×13
1	

$$1·474·200 = 2^3\ 3^4\ 5^2\ 7 \times 13.$$

18. — Allorchè si tratta di piccoli numeri, la loro *decomposizione* deve farsi *mentalmente.*

Ad es., si voglia decomporre 360.

Poichè 36 è 4 per 9, cioè 2^2 per 3^2, e poichè 10 è 2 per 5, si conclude che

$$360 = 2^3\ 3^2\ 5.$$

19. — *Un numero composto è divisore di un altro, allorchè ogni suo fattore primo è fattore dell' altro, e con esponente non maggiore* (cioè eguale o minore).

20. — Ad es.,

24 è un *divisore* di 360,

perchè $24 = 2^3\ 3$

in cui 2 e 3 sono fattori primi di 360, il 2 con esponente *eguale* a quello che esso ha in 360, ed il 3 con esponente *minore* di quello che esso ha in 360.

21. — Desiderate conoscere *tutti i divisori* di 360?

Scrivete la successione delle potenze di 2, con esponenti da 0 a 3.

Moltiplicate ciascuno di questi numeri per ciascuno di quelli della successione delle potenze di 3, con esponenti da 0 a 2, cioè:

1, 3, 9.

Moltiplicate ciascuno di questi numeri per ciascuno di quelli della successione di potenze di 5, con esponenti da 0 ad 1 (sottinteso), cioè: 1, 5.

1,	2,	4,	8,
3,	6,	12,	24,
9,	18,	36,	72,
5,	10,	20,	40,
15,	30,	60,	120
45,	90,	180,	360.

Naturalmente, ogni volta che avete dovuto moltiplicare per 1, non avrete fatto nulla.

E così, nel prospetto a destra, avrete ottenuto *tutti i divisori* di 360.

22. — *Quanti* sono *i divisori* di 360?

Nel nostro prospetto, ve ne sono 6 righe da 4.

Dunque: i divisori di 360 sono 24.

23. — Avrei potuto trovare *il numero dei divisori* di 360, *senza calcolarli*?

Sì, pensando che:

gli esponenti del 2, da 0 a 3, sono $3 + 1$, cioè 4,
gli esponenti del 3, da 0 a 2, sono $2 + 1$, cioè 3,
gli esponenti del 5, da 0 a 1, sono $1 + 1$, cioè 2.

Sicchè, se avessi buttato via il calcolo fatto di *tutti i divisori* di 360 e dovessi rifarlo, dovrei moltiplicare 4 numeri per 3 numeri, ottenendo 4×3 prodotti, cioè 12 numeri; e questi *dovrei* moltiplicare per 2 numeri, ottenendo 12×2 prodotti, cioè 24 numeri, che *sarebbero* i 24 *divisori* di 360.

24. — Brevemente:
ogni numero composto ha tanti divisori quant'è il prodotto degli esponenti, aumentati di 1, dei suoi fattori primi.

Ad es., poc'anzi ho trovato che

$$1\cdot474\cdot200 = 2^3\, 3^4\, 5^2\;\; 7 \times 13.$$

Basta saper questo, per concludere che *il numero dei divisori* di 1·474·200 è

$$(3+1)(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4\times5\times3\times2\times2=240.$$

Esercizi

1. — Dire i numeri primi fra 1 e 50.

(Non v'è bisogno di saperli a memoria e nemmeno di guardare la tavola dei numeri primi. Basta dire ordinatamente, dopo il 2, tutti i numeri che terminano con 1 o 3 o 7 o 9, sino al 47, saltando i cinque che sono divisibili per 3, cioè 9, 21, 27, 33 e 39).

2. — Mentalmente si decompongano i numeri:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 100.

3. — Decomporre 496, 9963, 4625, 8107, 1519.

4. — Decomporre 323, 1157, 1679, 7098, 1257.

5. — Tenendo sott'occhio la tavola dei numeri primi, decomporre 3964, 4045, 5579, 8327.

6. — Esaminare se fra i numeri 1217, 1219, 1221, 1223 qualcuno sia primo e decomporre in fattori quelli che non sono primi.

7. — Quali dei numeri

$$3^3\, 5^2, \qquad (5\times7)^3, \qquad 5^2\, 11, \qquad (3\times7)^2$$

sono divisori di

$$3^2\, 5^3\, 7^5$$

e perchè?

8. — Quanti e quali sono i divisori di 28?

Addizionate tutti i divisori di 28, fuorchè il 28 stesso. Che somma ottenete?

Un numero, che sia eguale alla somma di tutti i suoi divisori (eccettuato il numero stesso), si dice ***perfetto***.

9. — Quanti e quali sono i divisori di 220 e di 284?

Addizionate tutti i divisori di 220, fuorchè il 220 stesso. Che somma ottenete?

Addizionate tutti i divisori di 284, fuorchè il 284 stesso. Che somma ottenete?

Due numeri, ciascuno dei quali sia eguale alla somma dei divisori dell'altro (eccettuato quest'altro), si dicono ***amici***.

§ 4. — Numeri primi fra loro

1. — Due numeri naturali si dicono ***primi fra loro***, allorchè non hanno alcun *divisore comune*, diverso da 1.

2. — Segue anzitutto, che:

due numeri primi, diversi, sono primi fra loro.

Ad es., 31 e 41 sono primi fra loro.

3. — Inoltre:

ogni numero primo è primo con ogni numero che non sia divisibile per esso.

Ad es., si deva decidere se 7 e 936 sono o non sono primi fra loro.

Poichè 7 è primo e 936 non è divisibile per 7, si conclude che:

```
936 | 7
23  |----
 26   133
  5
```

7 e 936 sono *primi fra loro*

ovvero che: 7 è *primo con* 936.

4. — Allorchè si deve decidere se due numeri *composti* siano o non siano *primi fra loro*, il procedimento più spontaneo è quello di ***confrontare*** i loro ***fattori primi***.

Due numeri composti sono primi fra loro, quando i fattori primi dell' uno sono tutti diversi dai fattori primi dell'altro.

Ad es., poichè

$$200 = 2^3\ 5^2 \qquad \text{e} \qquad 693 = 3^2\ 7 \times 11$$

si conclude che 200 è primo con 693.

5. — Ma, dopo aver *decomposto* quello dei due che appare di più facile decomposizione, basta esaminare se l'altro sia o non sia divisibile per qualche fattore del primo.

Ad es., poichè manifestamente 693 non è divisibile nè per 2, nè per 5 (che sono i soli fattori primi di 200) si poteva concludere che 200 è primo con 693, senza decomporre anche questo.

6. — ***Un numero, che sia divisibile per due numeri primi fra loro, è divisibile per il loro prodotto.***

Ad es., si riconosce agevolmente che 2628 è divisibile tanto per 4 quanto per 9.

Poichè 4 e 9 *sono primi fra loro*, si conclude che 2628 è *divisibile* per 4×9, cioè per 36.

7. — Si badi che, se i due divisori *non fossero primi fra loro*, la conclusione potrebbe riuscire *falsa.*

Ad es., si riconosce agevolmente che 3520 è divisibile tanto per 4 quanto per 10.

Poichè 4 e 10 non sono primi fra loro (avendo il divisore comune 2), *non è lecito concludere* che 3520 è divisibile per 4×10, cioè per 40.

Ed infatti, $\qquad r\ (3520{,}40) = 20.$

8. — Da ciò e dalle *regole di divisibilità* che conoscete, si ricavano *altre regole di divisibilità.*

Ad es., volendo una regola per il divisore 12, lo decompongo nel *prodotto di due numeri primi fra loro*, come 3 e 4 (non 2 e 6).

Dopo ciò:
ogni numero, divisibile per 3 e per 4, è divisibile per 12.

9. — Analogamente:
ogni numero, divisibile per 12 e per 5, è divisibile per 60.

10. — Riassumendo le due ultime regole:
ogni numero, divisibile per 3, per 4 e per 5, è divisibile per 60.

DOMANDE

Quali numeri, delle coppie seguenti, sono primi fra loro?

1. 3 e 649 — *2.* 2 e 753 — *3.* 3 e 369
4. 19 e 23 — *5.* 21 e 81 — *6.* 21 e 91
7. 25 e 76 — *8.* 35 e 63 — *9.* 49 e 99

Qual è la regola di divisibilità:

1. per 6? — *2.* per 15? — *3.* per 18?
4. per 20? — *5.* per 22? — *6.* per 24?
7. per 30? — *8.* per 33? — *9.* per 40?
10. per 44? — *11.* per 45? — *12.* per 55?
13. per 66? — *14.* per 72? — *15.* per 75?
16. per 88? — *17.* per 90? — *18.* per 99?

CAPITOLO X

MASSIMO DIVISORE E MINIMO MULTIPLO

§ 1. — Massimo divisore comune

1. — Il Direttore di una scuola elementare ha deciso che i suoi alunni intervengano ad un corteo patriottico in *squadre* egualmente numerose, ma ciascuna di soli *bimbi* o di sole *bimbe*.

I bimbi sono 238 e le bimbe sono 136.

Qual è *il massimo* numero di alunni, di cui si potrà comporre ciascuna squadra?

2. — Anzitutto, affinchè le squadre siano *egualmente numerose* e ciascuna sia composta di *soli bimbi* o di *sole bimbe*, bisogna che il *numero* degli alunni d'ogni squadra sia un *divisore* tanto di 238 quanto di 136.

Dirò, brevemente, che il numero cercato dev'essere un *divisore comune* di 238 e di 136.

Anzi, poichè il Direttore vuole mettere in ogni squadra *il massimo* numero di alunni, questo numero dev'essere ***il massimo divisore comune*** di 238 e di 136.

3. — Poichè

$$238 = 2 \times 7 \times 17 \qquad \text{e} \qquad 136 = 2^3 \times 17,$$

i divisori di 238 sono:

1, 2, 7, 14, 17, 34, 119, 238

e *i divisori* di 136 sono:

1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136.

Dal confronto, risulta che *i divisori comuni* di 238 e di 136 sono:

1, 2, 17, 34

e che *il massimo* di questi è 34.

4. — Dunque: ogni squadra sarà composta di 34 *bimbi* o di 34 *bimbe*.

Quante saranno le squadre di *bimbi*?

$$238 : 34 = 7.$$

Quante saranno le squadre di *bimbe*?

$$136 : 34 = 4.$$

Quante saranno, in tutto, le squadre?

$$7 + 4 = 11.$$

5. — Osservate che, scrivendo in ordine crescente *i divisori* di un qualunque numero naturale, diverso da zero, si ottiene una *successione finita*, la quale *incomincia* con 1 e *finisce* col numero *stesso*.

Inoltre, scrivendo in ordine crescente *i divisori comuni* di due (o di parecchi) numeri naturali, diversi da zero, si ottiene una *successione finita*, la quale *incomincia* con 1 e *finisce* con *il massimo divisore comune* dei numeri considerati.

6\. — Quindi: si può sempre trovare *il massimo divisore comune* di quanti e quali si vogliano numeri naturali.

7\. — Intanto, abbiamo imparato che *il massimo divisore comune* di 238 e di 136 è 34.

Il che esprimeremo brevemente, scrivendo:

$$\mathbf{D}\ (238,\ 136) = 34$$

dove la lettera **D** va considerata quale abbreviazione della frase

il massimo divisore comune di

e la *virgola entro parentesi* è adoperata quale *separatrice* dei *due numeri.*

8\. — Ma se dovessimo calcolare, ad es.,

$$\mathbf{D}\ (35280,\ 2772)$$

troppo ci vorrebbe a formare la *successione* dei 90 *divisori* di 35·280 e quella dei 36 *divisori* di 2·772, per ricavare, dal loro confronto, la *successione* dei loro 18 *divisori comuni*, l'ultimo dei quali sarebbe finalmente il numero cercato.

9\. — Fortunatamente, possiamo raggiungere il nostro scopo per un'altra via, molto più rapida.

Anzitutto, *decomponiamo* in *fattori primi* ciascuno dei due numeri dati.

Anzi, ricorriamo alla *decomposizione abbreviata*:

35280	2×5	2772	2^2
3528	2^3	693	3^2
441	3^2	77	7×11
49	7^2	1	
1			

Sicchè: $35280 = 2^4\ 3^2\ 5 \times 7^2$
$2772 = 2^2\ 3^2\ 7 \times 11.$

10. — Fatto ciò:
il massimo divisore comune di quanti si vogliano numeri è il prodotto dei loro fattori primi comuni, ciascuno col minimo esponente.

Quindi, nel caso nostro,

$$D\ (35280,\ 2772) = 2^2\ 3^2\ 7 = 252.$$

Questo è ***il metodo dei fattori primi.***

11. — Esso offre il grande vantaggio di servire per *quanti si vogliano numeri.*

Ad es., per utilizzare i calcoli già fatti, si debba trovare

$$D\ (35280,\ 2772,\ 234).$$

Si *decompongono* i primi due numeri com'è indicato sopra ed il terzo così:

$$234 = 2 \times 3^2\ 13$$

e si conclude che:

$$D\ (35280,\ 2772,\ 234) = 2 \times 3^2 = 18.$$

12. — Dal modo in cui si calcola *il massimo divisore,* risulta che:
i divisori comuni di quanti si vogliano numeri sono *i divisori del loro massimo divisore comune*

Ad es., i divisori comuni di

35·280, 2·772, 234

sono i divisori di 18, cioè:

1 2 3 6 9 18.

13. — Si poteva fare una grande economia di lavoro, nella ricerca dell'ultimo **D**, *decomponendo* soltanto il numero *minore*:

$$234 = 2 \times 3^2\ 13.$$

Dopo ciò, mediante le note regole di divisibilità, si riconosce che ciascuno degli altri due numeri è *divisibile* per 2 e per 9 (cioè 3^2).

La *divisione* per 13 del *minore* degli altri due numeri non dà resto 0.

Dunque (senza disturbare il numero maggiore): il 13 *non* è un fattore *comune* ai tre numeri dati.

2772	13
17	213
42	
3	

E non occorre saperne di più, per concludere che il numero cercato è 2×3^2, cioè 18.

14. — Mediante questo *procedimento abbreviato*, avremmo potuto risolvere il problema dei *bimbi* e delle *bimbe*, così:

136 è divisibile per 8, cioè per 2^3, ed il quoto è il numero primo 17,

238 è divisibile per 2 (e non per 4) ed anche per 17,

e perciò **D** $(238, 136) = 2 \times 17 = 34$.

238	17
68	14
0	

15. — Mediante il *procedimento abbreviato*, basta *decomporre* in fattori primi *un solo numero*.

Ma sappiamo che anche *una sola decomposizione* può riuscire *laboriosissima*.

Ecco perchè giova saper calcolare *il massimo divisore* di due numeri, senza fare *alcuna decomposizione*, ma ricorrendo invece al ***metodo delle divisioni successive***.

16. — Il calcolo si dispone così:

	1	1	3
238	136	102	34
102	34	0	

Si divide il maggiore dei due numeri, 238, per l'altro, 136, scrivendo il *quoziente*, 1, *sopra* il *divisore* ed il *resto*, 102, al solito posto.

Si trascrive il *primo resto*, 102, a *destra* del divisore, 136, e si eseguisce una *seconda divisione*, di 136 per 102, scrivendo il *nuovo quoziente*, 1, sopra il *nuovo divisore* ed il *nuovo resto*, 34, al solito posto, cioè *sotto* al *nuovo dividendo*.

Si trascrive il *secondo resto*, 34, a destra del *primo resto*, 102, e si eseguisce una *terza divisione*, di 102 per 34, scrivendo il *quoziente* ed il *resto* nel modo che ormai sapete.

Giunti così ad una *divisione esatta*, si conclude che *il suo divisore* è il *massimo divisore comune* dei due numeri dati.

17. — Ma, in tal modo, si calcola *il massimo divisore* di *due soli* numeri.

È possibile adoperare il *metodo delle divisioni successive*, allorchè i numeri, di cui si cerca *il massimo divisore comune*, sono *parecchi*?

Certamente.

Come il *prodotto* di *parecchi numeri* si ottiene col moltiplicare il *primo* per il *secondo*, il *prodotto ottenuto* per il *terzo*, il *prodotto ottenuto* per il *quarto*, e così via sino ad aver adoperato *tutti* i numeri dati, così:
il **D** (massimo divisore) di *parecchi numeri* si ottiene calcolando il **D** del *primo* e del *secondo*, il **D** del **D** *ot-*

tenuto e del *terzo*, il **D** del **D** *ottenuto* e del *quarto*, e così via sino ad aver adoperato *tutti* i numeri dati.

18. — L'*ordine*, in cui si adoperano i numeri dati, è *teoricamente* indifferente; perchè, variando quest'*ordine*, non varia *il risultato finale*.

Ma *praticamente* giova adoperare i numeri dati in *ordine crescente*.

19. — Ad es., rifacciamo il calcolo del

D (35280, 2772, 234).

Anzitutto, calcoliamo

D (2772, 234).

	11	1	5	2
2772	234	198	36	18
432	36	18	0	
198				

Poichè **D** (2772, 234) = 18

calcoliamo **D** (35280, 18).

	1960
35280	18
172	
108	
0	

Poichè **D** (35280, 18) = 18

concludiamo che:

D (35280, 2772, 234) = 18.

20. — Osservate che, eseguendo *una sola divisione*, abbiamo trovato che

D (35280, 18) = 18.

Giova ricordare che:
se un numero è divisibile per un altro, allora quest'altro è il loro massimo divisore comune.

Ad es., **D** (91, 7) = 7

perchè 91 è *divisibile* per 7.

21. — In particolare, poichè 0 è *divisibile* per *qualunque* numero (naturale, diverso da zero), senza fare alcun calcolo si può scrivere, ad es., che

D (0, 678) = 678.

Ma, detto ciò per semplice curiosità, continuo ad occuparmi di numeri naturali *diversi da zero*.

22. — Ora Pierino domanda quale dei *due metodi* (dei *fattori primi* o delle *divisioni successive*) dovrà adoperare.

Gli rispondo che, se *uno* dei due metodi fosse *sempre* il più comodo, vi avrei insegnato soltanto quello.

Se vi ho insegnato *due metodi*, gli è che talvolta giova ricorrere al *primo* e tal altra al *secondo*.

Quando *giova* adoperare il primo e quando il secondo? — domanda giustamente Pierino.

Gli rispondo ch'io preferisco il *primo*, ma col *procedimento abbreviato*, allorchè il *minore* dei numeri dati sia *facilmente decomponibile* in fattori primi.

Altrimenti, preferisco il *secondo*.

23. — Ecco un esempio convincente.

Si debba calcolare

D (5·747·499, 4·470·277).

Col metodo delle *divisioni successive*, si ha:

	1	3	2
5747499	4470277	1277222	638611
1277222	638611	0	

E si conclude che il **D** cercato è 638·611.

Per trovare questo risultato col metodo della *decomposizione in fattori primi* sarebbero occorse invece parecchie *ore di lavoro*, perchè:

$$5 \cdot 747 \cdot 499 = 3^2\ 701 \times 911$$
$$4 \cdot 470 \cdot 277 = 7 \times 701 \times 911.$$

Pensate un po', dopo aver trovato per l'uno il fattore 3^2 e per l'altro il fattore 7, quanti numeri *primi* avreste sperimentato invano come *divisori*, prima di scoprire per entrambi il fattore primo 701.

Date un' occhiata alla nostra *tavola di numeri primi* ed osservate dove stia di casa il 701.

Credo di non offendervi, pensando che la maggior parte di voi si sarebbe stancata per via.

Chi l'avesse percorsa sino al termine, avrebbe finalmente trovato il **D** cercato, così:

$$701 \times 911 = 638 \cdot 611.$$

24. — A ciò si aggiunga che, mentre il metodo della *decomposizione in fattori primi* ha il pregio *teorico* di essere *immediatamente applicabile* a *quanti si vogliano numeri*, in *pratica* non sono frequenti le occasioni di dover calcolare il **D** di più di *due numeri*.

Tuttavia, ad es., eccone una.

25. — Un giardiniere vuol trapiantare alcune piante di garofano, da un suo vivaio, sul contorno di tre aiuo-

le: in modo che due piante consecutive abbiano sempre una stessa distanza, *la massima* possibile.

Egli dispone con cura un pezzo di spago sul contorno di un'aiuola e poi lo misura: è lungo dm. 192.

Allo stesso modo, egli misura il contorno delle altre due aiuole: dm. 168 e dm. 128.

A quale *distanza* fra loro dovrà mettere due piante consecutive?

26. — In dm., la distanza cercata è

$$\mathbf{D}\ (192,\ 168,\ 128).$$

Calcolo *mentalmente* **D** (168, 128), così:
128 in 168 sta una volta, col resto 40,
che in 128 sta 3 volte, col resto 8,
che in 40 sta *esattamente* (quante volte, non importa).

Dunque, $\mathbf{D}\ (168,\ 128) = 8.$

Dopo ciò, m'accorgo *mentalmente* che 192 è ***divisibile*** per 8, sicchè:

$$\mathbf{D}\ (192,\ 8) = 8.$$

Quindi, $\mathbf{D}\ (192,\ 168,\ 128) = 8.$

Concludo che quelle piante di garofano devono esser messe in modo che due consecutive distino fra loro 8 dm.

Quante di quelle piante devono esser messe in ciascuna di quelle tre aiuole? Ditelo voi.

27. — Eccovi una questione d'altro genere.

Mentre una ruota anteriore di una vettura fa 84 giri, una ruota posteriore ne fa 48.

Qual è ***il minimo*** numero di giri completi della ***prima***, durante i quali anche la ***seconda*** fa alcuni giri completi?

28. — Incomincio col calcolare *mentalmente*

$$\mathbf{D}\ (84,\ 48)$$

così: 48 in 84 sta una volta, col resto 36,
che in 48 sta una volta, col resto 12,
che in 36 sta *esattamente.*

Sicchè: $\mathbf{D}\ (84,\ 48) = 12.$

Ora, mentre una ruota anteriore fa giri

$$84 : 12 = 7,$$

una ruota posteriore ne fa

$$48 : 12 = 4.$$

E così la questione è risolta.

29. — Le *due divisioni* riescono *esatte*, perchè 12 è un *divisore comune* dei *due dividendi.*

Inoltre, i *due quoti*, cioè 4 e 7, sono *primi fra loro*, appunto perchè 12 è il **D** dei *due dividendi.*

30. — Or dunque:
allorchè ciascuno di due numeri viene diviso per il loro massimo divisore comune, i due quoti risultano primi fra loro.

31. — Ed anche, reciprocamente:
se, col dividere separatamente due numeri per un loro divisore comune, si ottengono due quoti primi fra loro, allora il divisore adoperato è il massimo divisore comune di quei due numeri.

32. — Sappiamo che il dire, ad es.,

4 e 7 sono *primi fra loro*

val quanto dire che

l' unico divisore comune di 4 e di 7 è 1,

cioè che $\mathbf{D}\,(4,\ 7) = 1.$

Due numeri sono primi fra loro, quando il loro massimo divisore comune è 1.

33. — Or dunque ad es., per calcolare

$$\mathbf{D}\,(260,\ 500)$$

basta osservare che 20 è *un divisore comune* di 260 e di 500, e che inoltre:

$$260 : 20 = 13, \qquad 500 : 20 = 25, \qquad \mathbf{D}\,(13,\ 25) = 1.$$

Si conclude che

$$\mathbf{D}\,(260,\ 500) = 20.$$

34. — Se invece, ad es., si dovesse calcolare

$$\mathbf{D}\,(3276,\ 1260)$$

e, mediante le solite regole di divisibilità, ci si accorgesse che i due numeri dati sono entrambi *divisibili* per 4 e per 9, e quindi per 36, si potrebbe concludere intanto che 36 è *un divisore comune* dei due numeri dati.

Ma poichè i due quoti, 91 e 35, *non* sono *primi fra loro* (essendo entrambi divisibili per 7), il 36 *non* è *il massimo divisore comune* cercato.

3276	36		1260	36
36	91		180	35
0			0	

35. — Tuttavia, il lavoro fatto non è inutile.

Intanto, si può scrivere che

$$\mathbf{D}\,(3276,\ 1260) = 36 \times \mathbf{D}\,(91,\ 35).$$

Dopo ciò, osservando che

$$91 : 7 = 13, \qquad 35 : 7 = 5, \qquad \mathbf{D}\,(13,\ 5) = 1,$$

si conclude che

$$\mathbf{D}\,(91,\ 35) = 7.$$

Sicchè, riassumendo:

$$D\ (3276,\ 1260) = 36 \times 7 = 252.$$

36. — Per finire, supponiamo, ad es., di dover calcolare $D\ (2126,\ 2026)$.

Mediante le *divisioni successive*, si ha:

	1	20	3	1	5	2
2126	2026	100	26	22	4	2
100	26	22	4	2	0	

sicchè: $$D\ (2126,\ 2026) = 2.$$

Certamente, se aveste usato la *decomposizione in fattori primi*, avreste fatto molto più lavoro, perchè

$$2126 = 2 \times 1063 \qquad \text{e} \qquad 2026 = 2 \times 1013$$

dove 1063 e 1013 sono *numeri primi non compresi nella nostra tavola.*

Ma si poteva fare anche più presto, *interrompendo le divisioni successive sùbito dopo la prima,* così:

	1
2126	2026
100	

Infatti: a che cosa conduce la continuazione?
Al calcolo di $D\ (2026,\ 100)$.

Ora $$100 = 2^2\ 5^2$$

e sùbito ci si accorge che 2026 è *divisibile* per 2 (e non per 4) e *non* è *divisibile* per 5.

Ciò basta, per concludere che

$$D\ (2026,\ 100) = 2$$

e quindi che

$$D\ (2126,\ 2026) = 2.$$

37. — Nel risolvere gli *esercizi* e *problemi* seguenti, pensate che il maggior pregio di un calcolo, sùbito dopo la *esattezza*, è la *rapidità*.

Esercizi

Calcolare *il massimo divisore comune* delle seguenti *coppie* o *terne* di numeri:

I. — *mentalmente*, mediante la *decomposizione in fattori primi* soltanto del *minore* dei numeri dati.

1. 1852 e 6	2. 1215 e 6	3. 625 e 10
4. 1924 e 10	5. 1870 e 33	6. 1848 e 55
7. 3033 e 15	8. 3045 e 15	9. 1023 e 99

II. — facendo lo stesso, ma *per iscritto*.

1. 234, 162, 126	2. 396, 154, 286
3. 198, 360, 270	4. 1035, 180, 585

III. — *mentalmente*, mediante le *divisioni successive*.

1. 45 e 9	2. 6 e 4	3. 12 e 8
4. 20 e 15	5. 39 e 26	6. 72 e 48
7. 84 e 24	8. 91 e 52	9. 99 e 18

IV. — facendo lo stesso *per iscritto*, ma *interrompendo* le *divisioni successive* quando il calcolo si possa chiudere più rapidamente mediante la *decomposizione in fattori primi* di qualcuno dei *resti* successivi.

1. 10·302 e 9·894	2. 7·241 e 7.111
3. 6·503 e 6·377	4. 69·689 e 50·621
5. 2379, 2196, 1586	6. 1746, 1164, 1455

Problemi

1. — Un vecchio avaro ha messo da parte 1248 monete metalliche da una lira e 384 da due lire.

Egli vuol conservarle nel *minimo* numero di rotoli, in modo che questi contengano uno *stesso* numero di monete, ma di *una sola* specie.

Quante monete in ogni rotolo? e quanti rotoli dell'una e dell'altra specie di monete?

2. — Il signor Ambrogio ha un vigneto, in cui 1845 piante dànno uva nera e 1530 dànno uva bianca.

Le piante sono in *egual* numero in ogni filare, *il massimo* che si potesse, volendo che in ogni filare vi fosse *una sola* qualità di viti.

Quante piante per filare? e quanti filari di ciascuna specie di viti?

3. — Per una ricognizione su una costa nemica, vengono fatti scendere 91 marinai da una nave e 77 da un'altra.

A terra, essi devono raggrupparsi in drappelli composti del *minimo* numero di marinai, in modo però che il numero di marinai della prima nave ed il numero di marinai della seconda siano *gli stessi* in ogni drappello.

Quanti drappelli? e quanti marinai di una nave e quanti dell'altra in ogni drappello?

4. — Luigi ha misurato tre pezzi di spago.

Sono lunghi cm. 966, cm. 828, cm. 690.

Vuol tagliarli in pezzi, tutti *eguali*, ma lunghi il più possibile.

Quanti cm. saranno lunghi? e quanti saranno?

QUESTIONI

1. — Due numeri *naturali consecutivi* (come ad es., 14 e 15) sono sempre *primi fra loro*. Perchè?

(Se eseguite con essi *le divisioni successive*, qual è *il primo resto*? e quindi qual è *il loro massimo divisore*?)

2. — Due numeri *dispari consecutivi* (come, ad es., 25 e 27) sono sempre *primi fra loro*. Perchè?

(E questa volta qual è *il primo resto?* e quindi qual è *il secondo resto?*)

3. — Due numeri *pari consecutivi* (come, ad es., 30 e 32) hanno sempre per *massimo divisore comune* 2. Perchè?

(Poichè i due numeri sono *pari*, il 2 è *un loro divisore comune*. Per avere il diritto di affermare che il 2 è *il loro massimo divisore comune* bisogna sapere se, dividendo per 2 i due numeri, si ottengono *due quoti primi fra loro*.

Ma, nel caso nostro in cui i due numeri dati sono *pari consecutivi*, che cosa sono i *due quoti?*

Si ritorna così alla questione 1.)

§ 2. — Minimo multiplo comune

1. — Un giorno, le tre Grazie, ciascuna recando uno stesso numero di *mele*, incontrarono le nove Muse, ciascuna ornata d' uno stesso numero di *rose*. (1)

Le Grazie spartirono le mele con le Muse e queste spartirono le rose con quelle.

E così ciascuna Grazia e ciascuna Musa ebbe uno stesso numero di mele ed uno stesso numero di rose.

Quante, almeno, erano le mele?

Quante, almeno, erano le rose? (2)

(1) Le Grazie erano tre giovanette, figlie di Giove e di Eurinome. Si chiamavano: Aglaia, Eufròsine e Talìa. Simboleggiavano la bellezza fiorente e l' allegria decorosa.

Le Muse erano figlie di Giove e di Mnemòsine. Simboleggiavano: Callìope la poesia épica, Clio la storia, Erato la poesia amorosa, Euterpe la poesia lirica, Melpòmene la tragedia, Polìnnia la musica, Talìa la comedia, Tersícore la danza ed Urània l'astronomia.

A queste venne aggiunta più tardi Aretusa, simboleggiante la poesia bucolica.

(2) Tra i poemetti di un' antica *Antologia greca* (conosciuta dagli stu-

2. — Insieme, le 3 Grazie e le 9 Muse erano 12 Dee. Perciò, tanto il numero delle *mele* quanto quello delle *rose* doveva essere un

« numero naturale, *divisibile* per 12, ma diverso da 0 ».

Diremo, brevemente, che doveva essere un

« ***multiplo*** di 12 ».

3. — I *multipli* di 12 formano una *successione infinita*, che si ottiene *moltiplicando* per 12 ogni numero della *successione naturale*, 0 escluso:

12, 24, 36, 48, . . .

Analogamente, i *multipli* di 3 sono:

3, 6, 9, 12, 15, . . .

ed i *multipli* di 9 sono:

9, 18, 27, 36, 45, . . .

4. — Poichè le 3 Grazie erano giunte al convegno, ciascuna recando uno stesso numero di *mele*, il numero complessivo di queste doveva anche essere un *multiplo* di 3.

Ma, fortunatamente, 12 è un *multiplo* di 3.

5. — Dunque, le *mele* erano un *multiplo* di 12, e quindi *almeno* 12.

diosi con questa sola denominazione generica), alcuni sono *problemi aritmetici*, proposti a guisa di *indovinelli*.

Qui ne ho fusi due. Altri, citandoli, riferirò altrove; ma adattandoli all'indole del libro.

6. — Analogamente, poichè le 9 Muse erano giunte al convegno, ciascuna ornata d'uno stesso numero di *rose*, il numero complessivo di queste doveva anche essere un *multiplo* di 9.

Cioè: doveva essere un *multiplo comune* di 12 e di 9.

Ora, confrontando le due *successioni infinite*, dei *multipli* di 12 e dei *multipli* di 9, si scorge che ***il minimo multiplo comune*** di 12 e di 9 è 36.

7. — Dunque, le *rose* erano un *multiplo* di 36, e quindi *almeno* 36.

8. — Nel caso del *minimo*, tanto per le *mele* quanto per le *rose*, si osservi che

$$12 : 3 = 4 \qquad \text{e} \qquad 36 : 9 = 4.$$

Si conclude che ciascuna Grazia recava 4 *mele* e che ciascuna Musa era ornata di 4 *rose*. [1]

9. — Le Grazie (senza saperlo) vi hanno insegnato che

$$\text{m}\ (12,\ 3) = 12$$

[1] A tale conclusione si poteva giungere per quest'altra via.

Ogni Musa dovette ricevere *almeno una mela* e dare *almeno una rosa*.

Se diedero *una mela* ad ogni Musa, le Grazie distribuirono *nove mele* e quindi ciascuna si privò di *tre mele*. Perciò, essendo rimasta *una mela* ad ogni Grazia, ciascuna di queste era giunta al convegno con *quattro mele*.

Sicchè, *le mele erano almeno 12*.

Se ogni Musa si privò di *una rosa*, le Grazie ricevettero *nove rose* e quindi ogni Grazia ricevette *tre rose*. Perciò, essendo rimaste *tre rose* ad ogni Musa, ciascuna di queste era giunta al convegno con *quattro rose*.

Sicchè, *le rose erano almeno 36*.

dove la lettera « m » va considerata quale abbreviazione della frase

il minimo multiplo comune di

e la *virgola entro parentesi* è adoperata quale *separatrice* dei due *numeri.*

Analogamente, le Muse vi hanno insegnato che

$$\text{m } (12, 9) = 36.$$

10. — Ma le Grazie vi hanno insegnato, inoltre, che: *se un numero è divisibile per un altro, allora esso è il loro minimo multiplo comune.*

11. — Sicchè, riassumendo con quanto sapete: se un numero (diverso da zero) è *divisibile* per un altro, allora il *maggiore* è il loro *minimo multiplo* ed il *minore* è il loro *massimo divisore.*

Ad es., poichè

39 è *divisibile* per 13,

si conclude che

$$\text{m } (39, 13) = 39 \qquad \text{e} \qquad \text{D } (39, 13) = 13.$$

12. — Eppure, — confessa Pierino — a me verrebbe più *spontaneo* di pensare che il *massimo divisore* dovesse essere *maggiore* (anzichè *minore*) del *minimo multiplo.*

— Caro Pierino, — gli rispondo — questa volta la tua *spontaneità* non è altro che *distrazione*: di cui però non mi sorprendo, avendola riscontrata in molti miei scolaretti. Per liberartene, supponi che nel cortile stiano camminando, *per uno* ed in ordine decrescente di *statura*, due squadre di alunni: di una prima ginnasiale e di una terza liceale. Ti parrebbe tanto strano che il *massimo dei piccoli* fosse *minore* del *minimo dei grandi*?

13. — Pierino, che si è persuaso, domanda se si possa sempre trovare *il minimo multiplo comune* di quanti e quali si vogliano numeri naturali.

Certamente, perchè *il prodotto* dei numeri dati è sempre *un loro multiplo comune.* Quindi:
o esso è *il minimo multiplo comune,*
od altrimenti, mettendo in ordine crescente *i multipli comuni* che sono *minori* di quel *prodotto*, il *primo* di essi è *il minimo multiplo comune.*

14. — Mentre un ingranaggio è fermo, viene fatto un segno colorato su due denti che ingranano: uno d'una ruota di 48 denti e l'altro d'una ruota di 128 denti.

Quanti giri deve fare la prima ruota e quanti la seconda, affinchè i due denti segnati ritornino ad ingranare per la prima volta?

15. — Il numero dei denti che ingranano nel frattempo dev'essere *multiplo* tanto di 48 quanto di 128, anzi dev'essere *il loro minimo multiplo comune.*

I multipli di 48 sono

48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, ...

ed *i multipli* di 128 sono

128, 256, 384, ...

Risulta che:

$$m\ (48,\ 128) = 384.$$

Mentre ingranano 384 denti, la prima ruota fa giri

$$384 : 48 = 8$$

e la seconda ne fa $384 : 128 = 3.$

16. — Analogamente a quanto abbiamo fatto per la ricerca del *massimo divisore*, proponiamoci di calcolare

il *minimo multiplo* di quanti si vogliano numeri, senz'essere obbligati a *scrivere* le *successioni dei multipli di ciascuno*, per poi *confrontarle.*

17. — Ad es., poc'anzi ci occorreva di conoscere

$$\text{m}\ (48,\ 128).$$

Decomponendo in fattori primi i due numeri dati, si ha:

$$48 = 2^4\ 3 \qquad \text{e} \qquad 128 = 2^7.$$

Dopo ciò:

il minimo multiplo comune di quanti si vogliano numeri è il prodotto di tutti i loro fattori primi: i non comuni col proprio esponente ed i comuni col massimo esponente.

Quindi, nel caso nostro,

$$\text{m}\ (48,\ 128) = 2^7\ 3 = 128 \times 3 = 384.$$

Questo è ***il metodo dei fattori primi.***

18. — Esso offre il grande vantaggio di servire per *quanti si vogliano numeri.*

Ad es., per utilizzare i calcoli già fatti, si debba trovare

$$\text{m}\ (48,\ 128,\ 252).$$

Si *decompongono* i primi due numeri com'è indicato sopra ed il terzo così:

$$252 = 2^2\ 3^2\ 7$$

e si conclude che:

$$\text{m}\ (48,\ 128,\ 252) = 2^7\ 3^2\ 7 = 128 \times 63 = 8064.$$

19. — Dal modo in cui si calcola *il minimo multiplo*, risulta che:

i multipli comuni di quanti si vogliano numeri sono ***i multipli del loro minimo multiplo comune.***

Ad es., i multipli comuni di

48, 128, 252

sono i multipli di 252, cioè:

252, 504, 756, 1008, 1260, ...

20. — Il padre di Mario, per spronarlo a risolvere tutti i problemi proposti in un libro di Aritmetica, fece con lui questo patto:
ad ogni problema ben risolto, egli darà a Mario 20 cent.; ma ad ogni problema mal risolto, Mario gli darà 15 cent.

Alla fine della prima settimana, Mario non aveva guadagnato nè perduto neppure un cent.; ma, bene o male, egli aveva risolto un *numero* di problemi di cui rammento soltanto ch'era compreso fra 50 e 60.

Vorrei ritrovare questo numero. [1]

21. — I cent. guadagnati da Mario erano stati *un multiplo* di 20 e quelli da lui perduti erano stati *un multiplo* di 15.

Quindi, poichè i cent. guadagnati erano stati tanti, quanti quelli perduti, il loro numero era stato *un multiplo comune* di 20 e di 15, cioè *un multiplo* di

$$\mathbf{m}\ (20,\ 15) = \mathbf{m}\ (2^2 5\ ,\ 3 \times 5) = 2^2\ 3 \times 5 = 20 \times 3 = 60.$$

22. — Mentre 60 cent. di *guadagno* corrispondevano a *problemi ben risolti*

$$60 : 20 = 3,$$

[1] Qui, ho adattato ai miei scopi un problema dell'*Algebra* di CLAVIUS, del 1608.

Ivi, si *diceva* quanti erano stati i problemi *risolti* e si *chiedeva* quanti erano stati *ben risolti*. La quale questione risolvo poi, come una *continuazione* di quella ora proposta.

invece 60 cent. di *perdita* corrispondevano a *problemi mal risolti*

$$60 : 15 = 4.$$

Sicchè: ad ogni *compenso* fra guadagno e perdita, corrispondevano *problemi risolti*, bene o male,

$$3 + 4 = 7.$$

Dunque, *il numero* di problemi risolti da Mario nella prima settimana era stato *un multiplo di* 7.

Fortunatamente, fra 50 e 60 è compreso *un solo multiplo di* 7, il 56.

E perciò il numero cercato è 56.

23. — A questo punto, si può domandare quanti di quei 56 problemi sieno stati *risolti bene* e quanti invece siano stati *risolti male.*

24. — Noi non sappiamo in quale *ordine* si siano succeduti i problemi *bene* e *male* risolti da Mario.

Ma, per lo scopo nostro, è lecito immaginare, ad es., ch'egli ne abbia risolto:
bene 3, *male* 4, *bene* 3, *male* 4, e così sino alla fine, sicchè, ad ogni 7 problemi *risolti,* bene o male, avveniva il *compenso* fra guadagno e perdita.

Quante *volte* è avvenuto tale compenso?

$$56 : 7 = 8.$$

Quindi, per 8 volte Mario ha risolto *bene* 3 problemi ed ha risolto *male* 4 problemi.

Si conclude che i problemi *risolti bene* sono stati

$$3 \times 8 = 24$$

e quelli *risolti male*

$$4 \times 8 = 32.$$

25. — Qualcuno di voi potrebbe osservare che Mario non era poi tanto bravo, poichè aveva risolto *male* 32 problemi.

Ma, prima di tutto, voi non sapete quanto fossero difficili quei problemi. E poi riconoscerete almeno il buon volere di Mario, che in una settimana ne aveva *risolti*, bene o male, 56.

Anzi, vi consiglierei d'imitarlo, *risolvendo* ogni settimana non 56 problemi, ma soltanto 24, e tutti *bene.*

Ma dove trovare tanti problemi?

Anche in questo stesso libro, tra gli *esercizi* ed i *problemi* che sin qui avete saltato.

26. — Per quanto sappiamo, poichè

$$58{\cdot}500 = 2^2\ 3^2\ 5^3\ 13 \qquad \text{e} \qquad 2{\cdot}520 = 2^3\ 3^2\ 5 \times 7$$

si conclude che

$$\mathbf{D}\ (58500,\ 2520) = 2^2\ 3^2\ 5 = 180$$

$$\mathbf{m}\ (58500,\ 2520) = 2^3\ 3^2\ 5^3\ 7 \times 13 = 58500 \times 2 \times 7 =$$

$$= 117{\cdot}000 \times 7 = 819{\cdot}000.$$

27. — Ricorrendo alle loro *decomposizioni in fattori primi*, possiamo indicare *il prodotto dei due numeri* dianzi considerati, così:

$$2^2\ 3^2\ 5^3\ 13 \times 2^3\ 3^2\ 5 \times 7.$$

ed *il prodotto del loro massimo divisore per il loro minimo multiplo,* così:

$$2^2\ 3^2\ 5 \times 2^3\ 3^2\ 5^3\ 7 \times 13.$$

Nei *due prodotti* appaiono *i medesimi fattori primi e coi medesimi esponenti.*

Sicchè, *i due prodotti* sono fra loro *eguali.*

Per vostro esercizio, calcolate i due prodotti:

58·500 × 2·520 ed 819·000 × 180.

Troverete uno *stesso numero.*

28. — Or dunque:
il prodotto di due numeri è sempre eguale al prodotto del loro massimo divisore per il loro minimo multiplo.

29. — Quindi, inversamente:
per calcolare il minimo multiplo di due numeri, basta dividere il loro prodotto per il loro massimo divisore.

30. — In tal modo, poichè sappiamo calcolare *il massimo divisore* di due numeri, *evitando la loro decomposizione in fattori primi* (col metodo delle *divisioni successive*), possiamo *evitare la loro decomposizione in fattori primi* anche per il calcolo del loro *minimo multiplo.*

Il vantaggio non è lieve, perchè a volte le *decomposizioni* riescono laboriosissime.

31. — Allorchè si vuol calcolare *il minimo multiplo* di due numeri col ***metodo del massimo divisore***, anzichè *moltiplicare* i due numeri e poi *dividere* il loro prodotto per il loro massimo divisore, riesce più comodo: ***dividere il minore dei due numeri per il loro massimo divisore e poi moltiplicare il quoto per l'altro numero.***

32. — Ad es., per fare un confronto, calcoliamo in questo modo **m** (58500, 2520).

	23	4	1	2
58500	2520	540	360	180
8100	360	180	0	

2520 | 180
720 | 14
0

58500
14
234000
585
819000

E così ritroviamo che:

$$m\ (58500,\ 2520) = 819{\cdot}000.$$

33. — Questo procedimento è il più comodo per il *calcolo mentale* del *minimo multiplo* di due numeri non troppo grandi.

Ad es., i due numeri siano 24 e 18.

Si *pensa*:

18 in 24 sta una volta, col resto 6,
che in 18 sta 3 volte *esattamente.*

A questo punto, si sa che

$$D\ (24,\ 18) = 6$$

e che

$$18 : 6 = 3.$$

Perciò, si completa la ricerca col moltiplicare *mentalmente* 24 per 3. E si *scrive*:

$$m\ (24,\ 18) = 72.$$

34. — In particolare, se due numeri sono *primi fra loro*, allora il loro *massimo divisore* è 1, e quindi la divisione diventa inutile.

Sicchè: *il minimo multiplo di due numeri, primi fra loro, è eguale al loro prodotto.*

Ad es., poichè

$$D\ (28,\ 15) = 1$$

si conclude che:

$$m\ (28,\ 15) = 28 \times 15 = 420.$$

Inversamente:

se due numeri non sono primi fra loro, il loro minimo multiplo è minore del loro prodotto.

35. — Ma, nel modo indicato, si calcola *il minimo multiplo* di *due soli* numeri.

È possibile adoperare *il metodo del massimo divisore*, allorchè i numeri, di cui si cerca *il minimo multiplo comune*, sono *parecchi*?

Certamente.

In modo analogo a quanto ho detto per il **D** (massimo divisore):

il **m** (minimo multiplo) di *parecchi numeri* si ottiene calcolando il **m** del *primo* e del *secondo*, il **m** del **m** *ottenuto* e del *terzo*, il **m** del **m** *e del quarto*, e così via sino ad aver adoperato *tutti* i numeri dati.

36. — Ad es., per utilizzare i calcoli già fatti, si debba calcolare

m (58500, 2520, 1274).

Trovato che

m (58500, 2520) = 819·000

si procede così:

	642	1	6
819000	1274	1092	182
5460	182	0	
3640			
1092			

D (819000, 1274) = 182

m (819000, 1274) = (1274 : 182) 819000 = 7 × 819000 =

= 5·733·000

e si conclude che questo è il numero cercato.

37. — *L'ordine*, in cui si adoperano i numeri dati, è *teoricamente* indifferente: perchè, variando quest'*ordine*, non varia *il risultato finale*.

Praticamente, giova adoperare i numeri dati in *ordine decrescente*, contrariamente a quanto conviene nella ricerca del *massimo divisore*.

Ma, talvolta, alcune particolarità dei numeri dati possono consigliare di ordinarli diversamente.

38. — Quanto alla *preferenza* da dare all'uno o all'altro *metodo* (dei *fattori primi* o del *massimo divisore*), giova attenersi al *primo* allorchè i numeri dati sono *parecchi* e *facilmente decomponibili*.

Altrimenti, giova attenersi al *secondo*.

Ma, talvolta, giova ricorrere un po' ad un metodo ed un po' all'altro.

39. — Ad es., si debba calcolare

$$\mathrm{m}\ (1833,\ 91,\ 60).$$

La facile *decomponibilità* dei numeri 91 e 60 consiglia di adoperare i numeri in *ordine crescente* e ad *iniziare* la ricerca col metodo dei *fattori primi*.

$$60 = 2^2\ 3 \times 5 \qquad\qquad 91 = 7 \times 13.$$

Poichè 91 e 60 risultano *primi fra loro* (1),

$$\mathrm{m}\ (91,\ 60) = 91 \times 60 = 5460.$$

Per evitare la decomposizione di 1833, si *prosegue* la ricerca col metodo del *massimo divisore*.

(1) Si può accorgersene, anche eseguendo mentalmente le divisioni successive, così:

60 in 91 sta una volta, col resto 31,
che è *primo* e che in 60 *non sta esattamente*.

	2	1	46
5460	1833	1794	39
1794	39	234	
		0	

```
1833 | 39        5460
 273 | 47          47
   0            -----
                38220
                2184
               ------
               256 620
```

$$\mathbf{D}\ (5460,\ 1833) = 39$$

$$\mathbf{m}\ (5460,\ 1833) = (1833\ :\ 39)\ 5460 = 47 \times 5460 =$$

$$= 256{\cdot}620.$$

Si conclude che:

$$\mathbf{m}\ (1833,\ 91,\ 60) = 256{\cdot}620.$$

Esercizi

Calcolare *il minimo multiplo comune* delle seguenti *coppie* e *terne* di numeri:

I. — *mentalmente,* col metodo del *divisore comune*, calcolato con le *divisioni successive*:

1. 8 e 6 — **2.** 15 e 12 — **3.** 24 e 20
4. 28 e 21 — **5.** 30 e 25 — **6.** 31 e 30
7. 39 e 26 — **8.** 56 e 14 — **9.** 64 e 20

II. — *mentalmente*, col metodo del *divisore comune,* calcolato *decomponendo in fattori primi* soltanto *il minore* dei numeri dati.

1. 105 e 6 — **2.** 312 e 6 — **3.** 102 e 10
4. 104 e 12 — **5.** 205 e 15 — **6.** 603 e 30
7. 603 e 30 — **8.** 121 e 33 — **9.** 504 e 35

III. — *per iscritto*, mediante *decomposizione in fattori primi.*

1. 588 e 336 — **2.** 780 e 364 — **3.** 803 e 143
4. 15, 10, 6 — **5.** 24, 20, 28 — **6.** 30, 20, 15
7. 91, 49, 21 — **8.** 72, 48, 27 — **9.** 80, 45, 24

IV. — *per iscritto*, col metodo del *divisore comune*, calcolato con le *divisioni successive.*

1. 4220, 3345, 2724 — **2.** 1912, 1398, 916
3. 4605, 3991, 2149 — **4.** 6539, 4024, 5533

1. — Due campane incominciano a suonare contemporaneamente.

Una fa un rintocco ogni 4 secondi e l'altra ogni 6.

Ogni quanti secondi suonano insieme?

Se smettono appena hanno suonato insieme 5 volte, per quanto empo ha suonato ciascuna campana?

Quanti rintocchi ha fatto ciascuna campana?

(La seconda e la terza domanda sono insidiose. Per la seconda, bisogna trascurare il rintocco iniziale e per la terza bisogna contarlo).

2. — Da una piazza si dipartono tre linee tramviarie.

Il servizio incomincia alle 6 e le partenze per le tre linee si susseguono rispettivamente ogni 10 minuti, ogni 15 minuti ed ogni 18 minuti.

A che ora si avrà una nuova partenza simultanea?

(Quanti minuti devono trascorrere? quante ore complete in quei minuti e quanti minuti residui?)

3. — Due contadine andarono al mercato a vendere uova, portandone uno stesso numero, ch'era più vicino al 100 che al 200.

Entrambe le vendettero *tutte*, l'una a *diecine* e l'altra a *dozzine*.

Quante uova ha venduto ciascuna?

(Di quali *numeri* dev'essere *multiplo* il numero cercato? qual è il *loro minimo multiplo*? Di qual *numero* dev'essere *multiplo* il numero cercato? Qual è il *multiplo* di quel *numero* che è più vicino al 100 che al 200?)

4. — Una contadina possiede un numero di uova che è compreso fra 500 e 1000.

Ha provato a raggrupparle a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4, a 5 a 5, a 6 a 6 ed ogni volta *ne avanzava uno.*

Finalmente, ha potuto raggrupparle a 7 a 7, *esattamente*.

Quante erano quelle uova? [1]

[1] Questo problema è proposto nel *Liber Abaci* del *Fibonacci*.

Ne ho abbreviato l'enunciato ed ho premesso una *condizione* che, insieme con le altre, *determina* il numero cercato.

(Mettendo da parte 1 uovo, il numero delle altre uova era *multiplo* di 2, di 3, di 4, di 5 e di 6, cioè era *multiplo* di . . .

Si *incominci* a scrivere la *successione* dei « *multipli* di 60 *aumentati* di 1 », ad es. da 61 a 361.

Il numero delle uova dev'essere *un multiplo* di 7. Divisi per 7, i numeri della nostra successione dànno ordinatamente per *resti* . . .

Si *prosegua* sino a trovare un *resto* che sia *zero*.

Qual è dunque, nella nostra successione, *il primo multiplo* di 7 ?

Ma esso è *minore* di 500.

Come si possono ricavare da esso tutti *i multipli* di 7, che appartengono alla nostra successione ?

Aggiungendo successivamente il *minimo multiplo comune* di 7 e di 60, cioè . . .

Quali sono *il secondo* ed *il terzo* ?

Ma *il terzo* è *maggiore* di 1000.

Dunque, *soltanto il secondo* è *compreso* fra 500 e 1000, e perciò esso è il numero cercato.)

5. — In una pista circolare, corrono tre ciclisti, che gli spettatori distinguono dal colore delle maglie: bianca, rossa e verde.

Partono nello stesso istante, nel medesimo verso e ciascuno procede con una sua velocità costante.

Dopo 12 minuti il bianco raggiunge alle spalle il rosso e dopo altri 6 minuti raggiunge alle spalle anche il verde.

Dopo quanti minuti il verde avrà raggiunto alle spalle il rosso ?

(Il bianco raggiunge alle spalle il rosso ogni 12 minuti ed il verde ogni $12 + 6$ minuti.

Ogni quanti minuti si trovano assieme i tre corridori ?

$$m\ (12,\ 18).$$

Frattanto, il bianco quanti giri di pista ha fatto più del rosso ? del verde ?

E quindi, in quel tempo, quanti giri di pista ha fatto il verde più del rosso ?

Sicchè, in quanti minuti il verde fa un giro di pista più del rosso ?)

6. Dopo essersi un po' riposati, i tre ciclisti ripartono nello stesso istante, ciascuno con la sua solita velocità costante: il rosso ed il verde in un verso, ed il bianco nell'altro.

Il bianco incontra il verde ogni 4 minuti.

Ogni quanto tempo, il bianco incontra il rosso ?

(Per il problema precedente, dopo 36 minuti il rosso ed il verde si trovano allo stesso punto, ma il rosso ha fatto un giro di meno del verde.

Frattanto, il bianco incontra 36 : 4 volte il verde, ed una volta di meno il rosso.

Sicchè il primo incontro del bianco col rosso accade dopo minuti 36 : 8, cioè dopo secondi (60 × 36) : 8.

Quanti minuti completi e quanti secondi residui?)

QUESTIONI

1. — *Coppie di numeri, diverse* fra loro non soltanto per l'ordine di questi, possono avere uno *stesso massimo divisore* ed uno *stesso minimo multiplo.*

Per convincervene, calcolate, ad es., il D e il m delle coppie seguenti:

270 e 36, 180 e 54, 108 e 90.

2. — Sicchè, in generale: *dati il massimo divisore ed il minimo multiplo di due numeri, questi non sono determinati.*

3. — Tuttavia: *se il quoto del minimo multiplo per il massimo divisore è un numero primo, allora i due numeri sono rispettivamente eguali al loro minimo multiplo ed al loro massimo divisore.*

Ad es., se due numeri hanno per loro *massimo divisore* 38 e per loro *minimo multiplo* 114, allora, poichè 114 : 38, cioè 3, è un *numero primo*, si conclude che i due numeri *devono essere* 114 e 38.

Se due numeri hanno per *minimo multiplo* 336 e per *massimo divisore* 48, possono essere diversi da 336 e da 48?

4. — Ed ancora: *se il quoto del minimo multiplo per il massimo divisore è il prodotto di due soli fattori primi diversi* (ciascuno alla prima potenza) *ed i due numeri devono essere diversi dal loro minimo multiplo e dal loro massimo divisore, allora i due numeri sono determinati*; e si ricavano dal massimo divisore, moltiplicandolo separatamente per ciascuno dei due fattori primi accennati.

Ad es., due numeri hanno per *massimo divisore* 12 e per *minimo multiplo* 72, ed essi non sono 72 e 12.

Calcolateli.

CAPITOLO XI

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

§ 1. — Lunghezze di segmenti

1. — Chi vuol *disegnare* accuratamente un ***segmento*** (di ***retta***), scorre con la punta della matita (o del ***tira-linee***) sull'orlo di una *riga* (o di una *squadra*).

2. — Chi vuol *misurare* la *lunghezza* di un ***segmento disegnato*** (o vuol *disegnare* un *segmento* di *lunghezza prestabilita*), adopera il *doppio decimetro*: cioè una *riga* lunga *due decimetri*, il cui orlo è suddiviso in *centimetri numerati* ed in cui ogni cm. è suddiviso in *millimetri* (segnati, ma non numerati).

E se deve misurare segmenti la cui lunghezza sia *maggiore* di 2 dm., adopera il doppio decimetro *ripetutamente*, facendolo scorrere lungo il segmento.

3. — Ma chi vuol *segnare* un segmento, col solo scopo di fissare l'*attenzione* propria o dell'ascoltatore, si accontenta di tracciarlo *a mano libera*.

Ed occorrendo, gli dà *ad occhio* una *lunghezza prestabilita*.

Così fanno abitualmente, durante una lezione di *geometria*, l'insegnante sulla *lavagna* e gli scolari sul *quaderno.*

4. — Naturalmente, non si può pretendere che ***un segmento segnato a mano libera*** sia ***un vero segmento,*** nè che abbia veramente la *lunghezza* che gli si è attribuita *ad occhio.*

Ma ciò non impedisce di parlarne *come se fosse un segmento* e ***come se avesse la lunghezza prestabilita.***

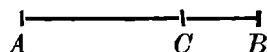
5. — Non bisogna però abusare della possibilità di ***ragionar bene*** su una figura ***disegnata male.***

Perchè, se è disegnata *troppo male* (per la manifesta ***inverosimiglianza*** della *forma* o della *grandezza*), la *figura*, anzichè *fissare utilmente l'attenzione*, può ***distrarla*** ed anche indurla in *errore.*

Così ad es., mentre si parla di due segmenti lunghi 5 cm. ed 8 cm., sarebbe deplorevole che il *secondo* venisse segnato *più corto* del *primo* oppure *più lungo* del *doppio del primo.*

6. — Ciascuno dei due ***estremi*** di un *segmento*, ed ogni altro suo *punto* di cui si deve parlare, viene ***indicato*** con un ***trattino trasverso*** e ***nominato*** con una qualunque delle lettere

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots \quad Z.$$

Ad es., nella nostra figura A e B sono gli *estremi* di un *segmento,* di cui C è un ***punto interno***: cioè un punto che *appartiene* al *segmento*, ma ***non è un suo estremo.***

7\. — *Due punti qualunque sono gli estremi di un solo segmento.*

Invece di dire:

il segmento *di estremi* A e B

si dice il segmento AB

ovvero il segmento BA

od anche, abbreviatamente, AB ovvero BA.

(Si legga AB come se fosse scritto A, B.)

8\. — *Tutti* i punti dei segmenti AC e CB appartengono al segmento AB.

Il punto C è *comune* ai segmenti AC e CB (cioè: appartiene ad *entrambi*).

Ogni *altro* punto del segmento AB appartiene ad *un solo* dei segmenti AC e CB.

Tutto ciò si esprime, dicendo che il punto C *scinde* il segmento AB nei due segmenti AC e CB.

Ogni punto interno ad un segmento, scinde questo in due segmenti.

9\. — Se i segmenti AC e CB sono lunghi mm. 21 e mm. 9, il segmento AB è lungo mm.

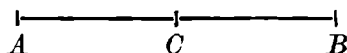
$$21 + 9 = 30.$$

Inversamente, se i segmenti AB e CB sono lunghi mm. 30 e mm. 9, il segmento AC è lungo mm.

$$30 - 9 = 21.$$

E, se i segmenti AB ed AC sono lunghi mm. 30 e mm. 21, il segmento CB è lungo mm.

$$30 - 21 = 9.$$

10. — Dire che C è ***il punto medio*** del segmento AB,

equivale a dire che C è un punto del segmento AB e che i segmenti AC e CB hanno una *medesima lunghezza.*

11. — Allorchè si devono misurare *lunghezze di segmenti*, anzitutto bisogna *scegliere* una opportuna *unità lineare.*

Ad es., per i *lati* di un biglietto da visita il mm. e per quelli di una tavola il cm.,
per l'*altezza* di una stanza il dm. e per quella di una torre il m.,
e per la *distanza* fra due città il km.

12. — In ciascuna delle *domande* seguenti, tanto i segmenti la cui *lunghezza* è *data*, quanto quelli la cui *lunghezza* è *cercata*, vanno riferiti ad *una stessa unità lineare.*

Ma, come *esercizio scolastico*, la *scelta* dell'*unità lineare* non giova ai *calcoli* e rende più imgombranti le *indicazioni*: perciò è meglio *sottintenderla.*

13. — Per ben comprendere ciascuna *domanda*, giova segnare *a mano libera* una *figura verosimile.*

DOMANDE

I. — Se C *è un punto interno al segmento* AB

1. — e se AC *e* CB *sono lunghi 37 e 13, quant'è lungo* AB *?*
2. — e se AB *ed* AC *sono lunghi 25 e 17, quant'è lungo* CB *?*
3. — e se AB *e* CB *sono lunghi 123 e 12, quant'è lungo* AC *?*

II. — Se A *è un punto interno al segmento* PQ, *se* B *è un punto interno al segmento* AQ.

1. — e se PA, AB, BQ *sono lunghi 7, 5, 3 quanto sono lunghi* PB, AQ, PQ *?*

2. — e se PA, BQ, PQ *sono lunghi 7, 3, 15, quant'è lungo* AB ?
3. — e se PB, AQ, PQ *sono lunghi 12, 8, 15 quant'è lungo* AB ?
(*Anzitutto, si calcoli la lunghezza di* PA *ovvero di* BQ.)

III. — Se A *è il punto medio del segmento* PQ, *se* B *è il punto medio del segmento* AQ.

1. — e se PQ *è lungo 48, quant'è lungo* AB ?
2. — e se AB *è lungo 12, quant'è lungo* PQ ?
3. — e se PA *è lungo 24, quanto sono lunghi* AB *e* PB ?
4. — e se PB *è lungo 36, quanto sono lunghi* AB, BQ, PQ ?

Problemi

1. — Qual è il *perimetro* (cioè: la somma dei quattro lati) di una cartolina postale lunga cm. 24 e larga cm. 9?

2. — Un tappeto copre esattamente una tavola, lunga cm. 120 e larga cm. 80.
Si vuol cingerlo con una frangia.
Quanti metri bisogna comperarne?

3. — Si vuol incorniciare una stampa, in modo che la parte visibile sia larga cm. 20 ed alta cm. 30.
A tale scopo, si vuol comperare dal corniciaio una striscia sagomata di noce, larga cm. 3.
Quale lunghezza di striscia occorre?
(Quando la cornice sia fatta, quanto sarà larga ed alta esternamente? quale sarà dunque il suo perimetro esterno?

4. — Una scacchiera ha 2 m. di perimetro esterno.
Le caselle sono cinte da una fascia, larga 5 cm.
Qual è il perimetro di ogni casella?

5. — Giorgio vorrebbe tagliare una cartolina postale usata, in modo da ricavarne quadratini tutti eguali e grandi il piú possibile.
Quanti quadratini otterrà?
(Nel problema 1 è stato detto quanto sia larga e lunga una cartolina postale dello Stato.
Di quanti cm. dovrà essere il lato di ogni quadratino?
Quante *file* di quadratini e di quanti per fila?

(Si può dirlo per *righe* o per *colonne*, ma il risultato finale è lo stesso.)

6. — In un campo ginnastico, è stato tracciato un *quadrilatero* irregolare, lungo il quale si vogliono piantare alcuni alberelli, in modo che due consecutivi abbiano una medesima distanza, la massima possibile: ma in modo che vi sia un alberello in ogni *vertice*.

I quattro *lati* sono lunghi metri 98, 154, 126, 182.

Quanti alberelli occorrono?

(Quale dev'essere la distanza fra due alberelli consecutivi? e perciò quanti saranno gli intervalli successivi?

Trattandosi di un tracciato *chiuso*, il numero degli intervalli sarà diverso da quello degli alberelli?)

7. — Di un pezzo di spago, lungo poco più di 10 m., Luigi, Mario e P i eanno fatto tre pezzi di eguale lunghezza.

Poi, del proprio pezzo, ciascuno ha fatto un numero diverso di pezzetti di eguale lunghezza.

Un pezzetto di spago di Luigi è lungo cm. 18, di Mario è lungo cm. 15, di Piero è lungo cm. 12.

Di quanto superava i 10 m. il primo pezzo di spago?

(Il *numero* dei cm. di ciascuno dei tre pezzi doveva essere un *multiplo comune* di 18, 15, 12 e perciò un *multiplo* del loro *minimo multiplo comune*. Lo si calcoli.

Se il *numero* dei cm. di ciascuno dei tre pezzi fosse stato proprio questo *minimo multiplo*, quanti cm. sarebbe stato lungo il primo pezzo di spago? quanti m. completi e quanti cm. residui?

È ciò ammissibile, poichè sappiamo che era lungo poco più di 10 m.?

Allora, doveva essere un *multiplo* della lunghezza calcolata. Il doppio? il triplo? Quanti cm. oltre i 10 m.?)

ANTICHE MISURE ITALIANE DI LUNGHEZZA

1. — Prima che venisse adottato *il sistema metrico decimale*, i piccoli Stati in cui era suddivisa l'Italia avevano altrettanti *sistemi di misura*.

E quindi persone, che risiedevano in Stati diversi, erano frequentemente costrette ad *interpretare* nel proprio sistema *le misure altrui* e ad *esprimere* in sistemi altrui *le proprie misure*.

E, quantunque si giovassero di apposite *tabelle di ragguaglio*' i calcoli riuscivano molto laboriosi.

2. — In molte Regioni, che corrispondono press'a poco a quegli Staterelli, sono ancora in uso ***gli antichi sistemi di misura*** e non soltanto nel linguaggio popolare, ma anche in contratti di compra-vendita, specie di terreni.

Sicchè, ancora giova conoscerli.

3. — Ma, per gli scopi odierni, anzichè riferire tra loro ***gli antichi sistemi di misura,*** a due a due, basta riferire ciascuno di essi al ***sistema metrico decimale.***

E così faccio, incominciando dalle ***misure di lunghezza,*** ma dissuadendo dalla vana fatica di rammentare ***nomi*** e ***numeri,*** che saranno da consultare ad ogni occasione.

4. — Ecco le varie ***unità principali,*** espresse in ***micron*** (milionesimi di metro):

piede di	BOLOGNA =	μ	380·098	
. . . . . .	MILANO =	»	435·185	
. . . . . .	TORINO =	»	514·403	
. . . . . .	VENEZIA =	»	347·735	
palmo di	CAGLIARI =	»	262·350	
. . . . . .	GENOVA =	»	248·083	
. . . . . .	NAPOLI =	»	264·550	
. . . . . .	PALERMO =	»	258·098	
. . . . . .	ROMA =	»	223·422	
braccio di	FIRENZE =	»	583·626	(1)

5. — Dovunque, ***l' unità principale*** era ***suddivisa*** in 12 ***oncie,*** fuorchè:
a FIRENZE, dove si componeva di 20 ***soldi,*** (ed ogni soldo) di 3 ***quattrini,*** (ed ogni quattrino) di 4 ***denari,***
ed a NAPOLI dove si suddivideva in ***decimi, centesimi*** e ***millesimi.***

6. — Ma *l'oncia* era ***suddivisa***:
in 12 ***linee***, a VENEZIA,
in 12 ***linee***, di 12 ***punti*** a GENOVA e PALERMO,
in 12 ***punti***, a CAGLIARI e TORINO,
in 12 ***punti***, di 12 ***atomi***, a BOLOGNA e MILANO,
in 5 ***minuti***, a ROMA.

(1) Chi si accontenta dei mm., trascuri la seconda terna di cifre.

Ma poi, ad es., nel calcolare il *miglio* di Napoli (Es. 4), commetterà l'errore non trascurabile di 3 m. ed 85 cm.

7. — E in Francia, — domanda Pierino — che cosa adoperavano, prima del *metro*?

— Adoperavano la *tesa*, suddivisa in 6 *piedi*, di 12 *pollici*, di 12 *linee*, di 12 *punti*.

— E quant'era lunga la *tesa*?

— Adottato il *metro legale*, la *tesa* risultò mm. 1949.

Esercizi

1. — A ROMA, 3 *piedi* equivalevano a 4 *palmi*.

Si calcoli (in μ) la lunghezza del *piede romano*.

(Si trascriva la lunghezza del *palmo romano*, la si moltiplichi per 4 e poi si divida per 3.)

2. — A BOLOGNA, a ROMA ed a VENEZIA, il *miglio* era 1000 *passi*, di 5 *piedi*.

Si calcoli (in m. ed in mm. residui) la lunghezza del *miglio* a Bologna, a Roma ed a Venezia.

(Anzitutto, si calcoli la lunghezza del *passo*, moltiplicando per 5 quella del *piede*.

Poi, invece di moltiplicare per 1000, si cambi l'indicazione μ in mm.

Staccando le ultime tre cifre, si avranno i m. a sinistra ed i mm. residui a destra.)

3. — Si calcoli il *miglio* di GENOVA, ch'era 1000 *passi* di 6 *palmi*.

4. — Si calcoli il *miglio* di NAPOLI, ch'era 700 *canne* di 10 *palmi*, ed il *miglio* di PALERMO, ch'era 720 *canne* di 8 *palmi*.

5. — Si calcoli il *miglio* di FIRENZE, sapendo che 3 *miglia* erano 1700 *canne*, di 5 *braccia*.

6. — A CAGLIARI il *piede* era il doppio del *palmo*. Calcolar lo

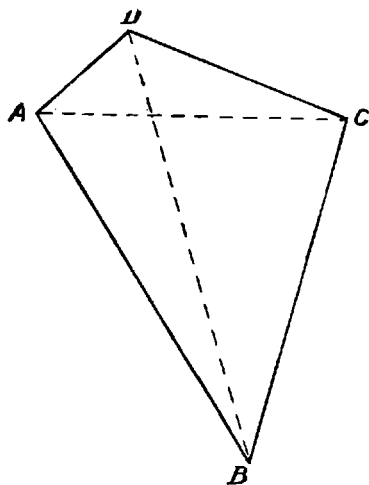
7. — Il *trabucco* era 6 *piedi*, a CAGLIARI, a MILANO ed a TORINO.

Calcolare le tre lunghezze del *trabucco*.

8. — Si calcoli il *miglio* di TORINO, ch'era 800 *trabucchi*.

§ 2. — Aree di triangoli e di quadrangoli

1. — Allorchè, in una medesima questione, ci dobbiamo occupare di *lunghezze* e di *aree*, sarà *sottinteso* che l' ***unità superficiale*** è ***il quadrato dell'unità lineare.***

Ad es., se l' *unità lineare* è il cm., sarà *sottinteso* che l' *unità superficiale* è il cm^2.

2. — Ogni ***quadrangolo***, o *quadrilatero* (come *ABCD*), ha ***quattro vertici***, a due a due ***opposti*** fra loro (come *A* e *D*, nonchè *B* e *C*.)

Ed ha ***quattro lati***, a due a due ***opposti*** fra loro (come *AB* e *DC*, nonchè *AD* e *BC*).

Il *segmento*, che unisce *due vertici opposti*, si chiama ***diagonale.***

Ad es., *AC* e *BD* sono le *diagonali* del quadrangolo *ABCD.*

Ogni quadrangolo ha due diagonali.

3. — Le *misure* di *due lati consecutivi* di un ***rettangolo*** si chiamano le sue ***dimensioni.***

Nel linguaggio comune si chiamano *base* ed *altezza*, ovvero *lunghezza* e *larghezza.*

4. — Ad es., in mm., le *dimensioni* di questo *rettangolo* sono 13 e 6.

Esso è composto di 6 *righe* di 13 *qua-*

dratini (ovvero di 13 *colonne* di 6 *quadratini*), ciascuno dei quali è un mm^2.

Quindi, *il numero dei quadratini*, che compongono il nostro *rettangolo*, è 13×6, cioè 78.

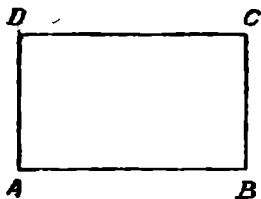
Brevemente: il nostro *rettangolo* è mm^2. 78.

E questa è la sua *area*.

5\. — Sicchè: *l'area di un rettangolo è il prodotto delle sue dimensioni.*

6\. — *Due lati opposti di un rettangolo hanno sempre la stessa lunghezza.*

Si esprime ciò, dicendo che sono fra loro *eguali*.

Ad es., nel rettangolo $ABCD$, sono fra loro *eguali* i lati AB e DC, nonchè AD e BC.

7\. — Quindi: se un *rettangolo* ha *due lati consecutivi eguali*, allora esso ha *tutti i lati eguali.*

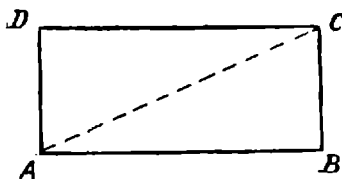
In questo caso, come sapete, lo si chiama *quadrato*; e si dice suo *lato* anche *la misura di un suo lato.*

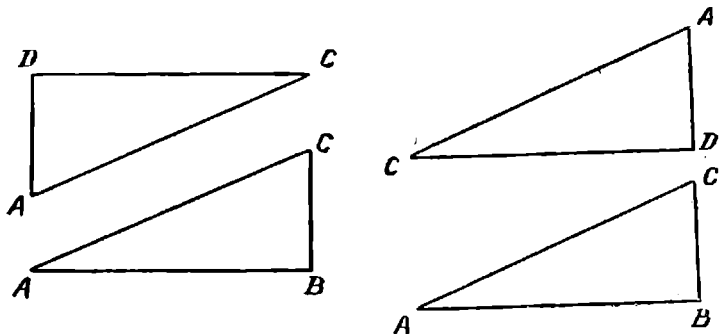
8\. — Perciò, l'*area* di un *quadrato* è il prodotto del suo lato per sè stesso, cioè la seconda potenza del suo lato.

Ad es., se il *lato* di un *quadrato* è mm. 7, allora la sua *area* è mm^2. 7^2, cioè 49.

Da ciò, l'uso di chiamare *quadrato di un numero* la sua *seconda potenza.*

9\. — Brevemente:

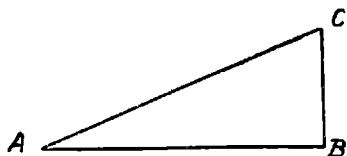
l'area di un quadrato è il quadrato del suo lato.

10. — In ogni *rettangolo* (ed, in particolare, in ogni *quadrato*): due *lati opposti* (come AB e DC) sono fra loro ***paralleli***, mentre due ***lati consecutivi*** (come AD e DC) sono fra loro ***perpendicolari***.

11. — La diagonale AC scinde il rettangolo $ABCD$ nei due ***triangoli*** ABC e CDA.

Stacchiamo i due triangoli e *giriamo* il triangolo ADC, facendolo *strisciare* sul foglio (cioè: *senza ribaltarlo*).

Ora, facendo *scorrere* sul foglio il triangolo CDA, possiamo *sovrapporlo esattamente* al triangolo ABC.

In questo momento, i due triangoli sono venuti a ***coincidere***.

Si esprime ciò, dicendo che i due ***triangoli*** sono (ed *erano*) fra loro ***eguali***.

12. — Sicchè: *ciascuna diagonale di un rettangolo lo scinde in due triangoli eguali.*

13. — Ogni *triangolo* (come ABC) ha *tre vertici* (i punti A, B, C) e *tre lati* (i segmenti AB, BC, CA).

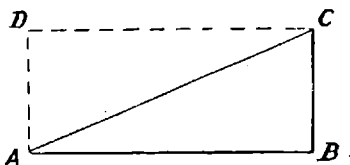
Se il triangolo ABC è quello che abbiamo ricavato dal rettangolo $ABCD$, allora *i lati* AB e BC sono fra loro *perpendicolari*.

Ci rammenteremo di ciò, dicendo che ABC è un ***triangolo rettangolo***, in B. (1)

14. — In ogni *triangolo rettangolo*, ciascuno dei *due lati perpendicolari* si chiama ***cateto*** ed il *terzo lato* si chiama ***ipotenusa***.

Ad es., nel triangolo ABC, rettangolo in B, *i cateti* sono AB e BC, l'*ipotenusa* è AC.

Sovente, per brevità, si parla dei *cateti* e dell'*ipotenusa*, intendendo parlare delle loro *misure*.

15. — Inversamente, dato un *triangolo* ABC, rettangolo in B, si può *completare* il *rettangolo* $ABCD$, segnando per A la *parallela* a BC, e per C la *parallela* ad AB.

16. — Poichè i triangoli ABC e CDA sono fra loro *eguali*, l'*area* del *rettangolo* $ABCD$ è *doppia* di quella del *triangolo* ABC.

Inversamente: *l'area* del *triangolo* ABC è *la metà* di quella del *rettangolo* $ABCD$.

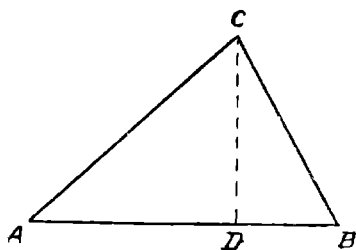
(1) Si noti che la parola *rettangolo*, adoperata sin qui come *sostantivo* (abbreviazione di *quadrangolo , rettangolo*) , ora viene adoperata come *aggettivo*.

17. — Brevemente: *ogni triangolo rettangolo è la metà del rettangolo avente per dimensioni i due cateti* (del triangolo).

18. — Ad es., in mm., se *i cateti* di un *triangolo rettangolo* sono lunghi 25 e 10, esso è *la metà* di un *rettangolo* le cui *dimensioni* siano 25 e 10.

In mm²., *l'area del rettangolo* è 25×10.

Quindi: *l'area del triangolo* è $(25 \times 10) : 2$, cioè 125.

19. — Sicchè: *l'area di un triangolo rettangolo è la metà del prodotto dei suoi cateti.*

20. — Sia *ABC* un *triangolo qualunque.*

Occupiamoci anzitutto del caso in cui la *perpendicolare* al segmento *AB*, per *C*, lo incontra in un punto *D*, *interno* ad esso.

In questo caso, *l'area* del triangolo *ABC* è *la somma* delle *aree* dei triangoli *ADC* e *BDC*, entrambi *rettangoli* in *D*.

Supponiamo che, in mm., i segmenti *AD*, *DB*, *CD* siano lunghi 27, 13, 25.

Per quanto sappiamo, in mm², *le aree* dei triangoli *ADC* e *BDC* sono

$$(27 \times 25) : 2 \quad \text{e} \quad (13 \times 25) : 2$$

e quindi *l'area* del triangolo *ABC* è

$$[(27 + 13)\ 25] : 2 = (40 \times 25) : 2 = 500.$$

Dunque: *l'area* del triangolo *ABC* è mm². 500, cioè cm². 5.

21. — Si osservi che, per calcolare *l'area* del triangolo

ABC, non occorreva misurare *separatamente* i segmenti *AD* e *DB*.

Era *preferibile* misurare *soltanto* il segmento *AB*.

Così facendo, si sarebbe trovato, in mm. e mm^2., che i segmenti *AB* e *CD* sono lunghi 40 e 25, e che *l'area* del triangolo *ABC* è

$$(40 \times 25) : 2 = 500.$$

22. — Nel nostro triangolo *ABC*, il segmento *CD* si chiama: *altezza corrispondente al lato AB.*

Sovente, per brevità, si parla di *lati* e di *altezze*, intendendo parlare delle loro *misure*.

23. — Si conclude che, almeno nel caso considerato: *l'area di un triangolo è la metà del prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza.*

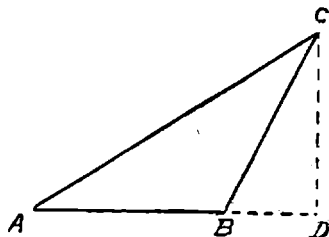
24. — Ed ora occupiamoci del caso in cui la *perpendicolare* alla *retta AB*, per *C*, la incontra in un punto *D*, situato *esternamente* al segmento *AB*, ad es. dalla parte di *B*.

In questo caso, *l'area* del triangolo *ABC* è *la differenza* delle *aree* dei triangoli *ADC* e *BDC*.

Supponiamo che, in mm., i segmenti *AD*, *BD*, *CD* siano lunghi 37, 12, 24.

Per quanto sappiamo, in mm^2., *le aree* dei triangoli *ADC* e *BDC* sono

$$(37 \times 24) : 2 \quad \text{e} \quad (12 \times 24) : 2$$

e quindi *l'area* del triangolo *ABC* è

$$[(37 - 12)\ 24] : 2 = (25 \times 24) : 2 = 300.$$

Dunque: *l'area* del triangolo ABC è mm². 300, cioè cm². 3.

25. — Neppure in questo caso, occorreva misurare *separatamente* i segmenti AD e BD. Anzi, era *preferibile* misurare *soltanto* il segmento AB.

Così facendo, si sarebbe trovato, in mm. e mm²., che i segmenti AB e CD sono lunghi 25 e 24, e che *l'area* del triangolo ABC è

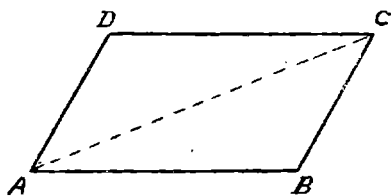
$$(25 \times 24) : 2 = 300.$$

26. — Anche in questo caso, il segmento CD si chiama: *altezza corrispondente al lato AB.*

E perciò, come nel caso precedente:
l'area di un triangolo è la metà del prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza.

27. — Questa regola vale anche per *i triangoli rettangoli*, nei quali ciascun *cateto* ha per *altezza corrispondente* l'altro *cateto.*

28. — Riassumendo: in ogni caso,
l'area di un triangolo è la metà del prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza.

29. — *Ogni quadrangolo, in cui ciascun lato è parallelo al suo opposto, si chiama* ***parallelogramma.***

Anche i *rettangoli* (ed, in particolare, i *quadrati*) sono *parallelogrammi.*

30. — In ogni *parallelogramma $ABCD$* (come, in particolare, ab-

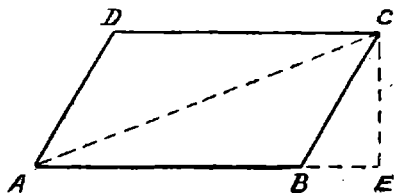
biamo fatto con un *rettangolo*), si può staccare il triangolo *CDA* dal triangolo *ABC* e poi farlo *coincidere* col triangolo *ABC*.

Si esprime ciò, dicendo che i due *triangoli ABC* e *CDA* sono fra loro *eguali*.

31. — Sicchè: *ciascuna diagonale di un parallelogramma lo scinde in due triangoli eguali.*

32. — Segue che *l'area* del *parallelogramma ABCD* è *doppia* di quella del *triangolo ABC*.

Ad es., in mm. e mm²., se nel triangolo *ABC il lato AB* e *la corrispondente altezza CE* sono lunghi 35 e 18, allora:

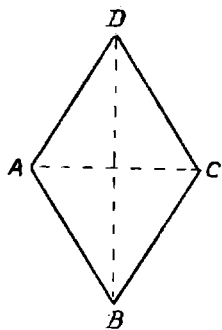
l'area del *triangolo ABC* è (35 × 18) : 2 e quindi *l'area* del *parallellogramma ABCD* (dovendo essere *doppia*) è

$$35 \times 18 = 630.$$

33. — Il *lato AB* e la *corrispondente altezza CE* del *triangolo ABC* si chiamano anche *lato* e *corrispondente altezza* del *parallelogramma ABCD*.

34. — Sicchè: *l'area di un parallelogramma è il prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza.*

E questa regola comprende, come caso particolare, quella per il *rettangolo* (e, quindi, anche per il *quadrato*).

35. — Come già sappiamo in particolare per i *rettangoli*, così:

in ogni parallelogramma, ciascun lato è eguale al suo opposto.

36. — Quindi: se un *parallelogramma* ha *due lati consecutivi eguali*, esso ha *tutti i lati eguali.*

In questo caso, lo si chiama ***rombo.***

37. — *Ogni quadrato è un rombo rettangolo.*

Ed inversamente:
ogni rombo rettangolo è un quadrato.

38. — *In ogni rombo, le diagonali sono fra loro perpendicolari.*

39. — *Se per i vertici di un rombo si segnano le parallele alle sue diagonali, si ottiene un rettangolo, composto di otto triangoli, tutti eguali fra loro e quattro dei quali compongono il rombo.*

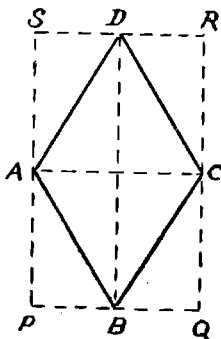
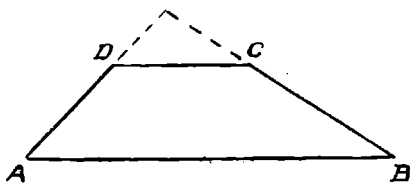
40. — Perciò, *l'area* del *rombo* è *la metà* di quella del *rettangolo* così costruito.

Ma i *lati* del *rettangolo* $PQRS$ sono *eguali* alle *diagonali* del *rombo* $ABCD$.

Quindi, *l'area* del *rettangolo* è *il prodotto delle* (misure delle) *diagonali* del *rombo.*

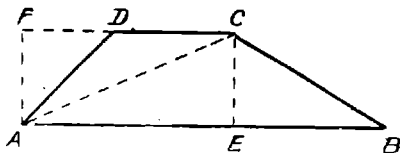
41. — Si conclude che:
l'area di un rombo è anche la metà del prodotto delle sue diagonali.

42. — Ad es., in mm. e mm²., se le *diagonali* AC e BD del rombo $ABCD$ sono lunghe 22 e 36, allora la sua *area* è

$$(22 \times 36) : 2 = 396.$$

43. — Ogni *quadrangolo*, in cui *due lati opposti sono fra loro paralleli*, ma gli altri due no, si chiama ***trapezio.***

Si chiamano ***basi*** di un *trapezio* i suoi *due lati paralleli.*

Gli *altri due lati* si dicono *concorrenti*: perchè, prolungati, si *incontrano.*

44. — Segnamo la *diagonale* AC del *trapezio* $ABCD$, l'*altezza* CE corrispondente al lato AB del *triangolo* ABC, e l'altezza AF corrispondente al lato DC del triangolo ADC.

Il quadrangolo $AECF$, che così si ottiene, è un *rettangolo*, di cui CE ed FA sono lati *opposti*, e perciò fra loro *eguali.*

La *comune lunghezza* delle due *altezze* CE ed AF dei *triangoli* ABC ed ADC si chiama ***altezza*** del *trapezio.*

45. — Calcoliamo *l'area* del *trapezio* $ABCD$, supponendo, ad es. in mm., che *le due basi* AB e CD, e *la sua altezza* CE siano lunghe 48, 16, 13.

L'area del triangolo ABC è mm². $(48 \times 13) : 2$.

L'area del triangolo ADC è mm². $(16 \times 13) : 2$.

Quindi, *l'area del trapezio* $ABCD$ è mm².

$$[(48 \times 13) : 2] + [(16 \times 13) : 2] = [(48 + 16) 13] : 2$$

cioè $(64 \times 13) : 2 = (64 : 2) 13 = 32 \times 13 = 416.$

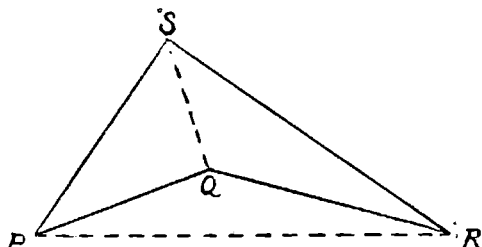
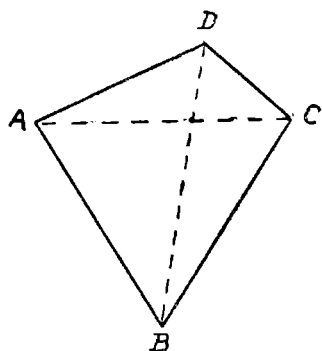
46. — Sicchè: ***l'area di un trapezio è la metà del prodotto della somma delle basi per l'altezza.***

47. — Sia detto una volta per tutte che, dovendo calcolare ***la metà di un prodotto***, può convenire di ***moltiplicare un fattore per la metà dell'altro***, se esso è ***pari.***

Questa avvertenza può riuscir utile nel calcolo dell'***area*** di un ***triangolo*** o di un ***trapezio***, ed anche di un ***rombo*** mediante le ***diagonali.***

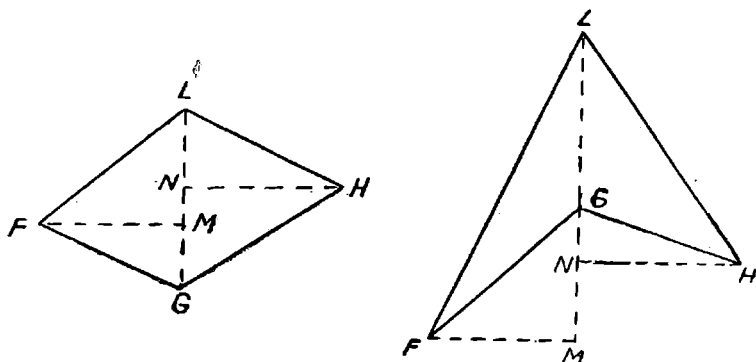
48. — Un ***quadrangolo*** qualunque si dice ***convesso*** o ***concavo*** secondochè le sue ***diagonali*** si ***tagliano*** o ***non si tagliano.*** (1)

Ad es., *ABCD* è un ***quadrangolo convesso*** e *PQRS* è un ***quadrangolo concavo.***

I ***parallelogrammi*** (ed, in particolare, i ***rettangoli, rombi*** ed i ***quadrati***) ed i ***trapezi*** sono ***convessi.***

49. — Ma in ogni ***quadrangolo, convesso*** o ***concavo***, si può segnare ***almeno una diagonale interna GL*** che lo

(1) Mi è parso che non fosse il caso di accennare ai *quadrangoli intrecciati.*

scinda in due triangoli: sicchè *l'area* del *quadrangolo* sia *la somma* delle *aree* dei *due triangoli.*

Supponiamo che, in mm., la *diagonale interna GL* sia

23 e che le *altezze corrispondenti FM* ed *HN* (nei triangoli *FGL* e *GHL*) siano 19 e 21.

L'area di ciascun *quadrangolo FGHL* è mm².

$[(23 \times 19) : 2] + [(23 \times 21) : 2] = [23\ (19 + 21)] : 2$
cioè $(23 \times 40) : 2 = 23\ (40 : 2) = 23 \times 20 = 460.$

50. — Sicchè: ***l'area di un quadrangolo qualunque è la metà del prodotto di una sua diagonale interna per la somma delle due altezze ad essa corrispondenti (nei due triangoli in cui si scinde il quadrangolo).***

DOMANDE

Sottintendendo, ad es., che l'unità lineare *è il mm. e quindi che* l'unità superficiale *è il mm².:*

1. — qual è l'area di un rettangolo lungo 7 e largo 5?
2. — qual è l'altezza di un rettangolo di area 35 e di base 7?
3. — qual è la base di un rettangolo, di area 35 e di altezza 5?
(*Qual è la regola generale per rispondere alle* domande *2 e 3?*)

4. — *quali sono il perimetro e l'area di un quadrato, di lato 4 ?*

5. — *quali sono il perimetro e l'area di un rettangolo, di dimensioni 6 e 3 ?*

(*Si badi che i numeri naturali adoperati nelle* domande *4 e 5 sono* i soli *per cui* il perimetro *e* l'area *di un rettangolo risultino espressi da* uno stesso numero.)

6. — *qual è l'area di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono 7 e 10 ?*

7. — *in un triangolo rettangolo, di cui l'area è 35 ed un cateto è 10, qual è l'altro cateto ?*

(*Qual è la regola generale ?*)

8. — *qual è l'area di un triangolo qualunque, di cui un lato è 12 e l'altezza corrispondente è 5 ?*

9. — *in un triangolo, di area 30 e di cui un lato è 12, qual è l'altezza corrispondente a questo ?*

10. — *in un triangolo, di area 30 e di cui un'altezza è 5, qual è il lato corrispondente a questa ?*

(*Qual è la regola generale per rispondere alle* domande *9 e 10 ?*)

11. — *qual è l'area di un parallelogramma, di cui un lato è 25 e l'altezza corrispondente è 8 ?*

12. — *in un parallelogramma, di area 200 e di cui un lato è 25, qual è l'altezza corrispondente a questo ?*

13. — *in un parallelogramma, di area 200 e di cui un'altezza è 8, qual è il lato corrispondente a questa ?*

(*Qual è la regola generale per rispondere alle* domande *12 e 13 ?*)

14. — *qual è l'area di un rombo, le cui diagonali sono lunghe 12 e 15 ?*

15. — *in un rombo, di area 90 e di cui una diagonale è lunga 12, quant'è lunga l'altra diagonale ?*

(*Qual è la regola generale ?*)

16. — *qual è l'area di un trapezio, di cui le basi sono 23 e 17, e l'altezza è 10 ?*

17. — *in un trapezio, di cui le basi sono 23 e 17, e l'area è 200, qual è l'altezza ?*

(*Qual è la regola generale ?*)

18. — *in un trapezio, di cui l'area è 200, l'altezza è 10, ed una base è 23, qual è l'altra base ?*

(*Qual è la regola generale ?*)

19. — *qual è l'area di un quadrangolo, di cui una diagonale interna è 30 e le altezze, ad essa corrispondenti nei due triangoli parziali, sono 11 e 9?*

20. — *in un quadrangolo, di area 300 ed in cui le altezze corrispondenti ad una diagonale interna sono 11 e 9, quant'è lunga questa diagonale?*

(*Qual è la regola generale?*)

Problemi

Si riprendano sott'occhio ordinatamente i *problemi* da *1* a *5* del § precedente e si calcoli *l'area*:

1. — della cartolina postale.

2. — del tappeto.

3. — della parte visibile della stampa, complessiva e della sola cornice.

4. — della scacchiera (fascia compresa), di ogni casella e della sola fascia.

5. — di ogni quadratino.

ANTICHE MISURE ITALIANE DI AREA

Ecco le varie *unità principali* per le *misure di area*, espresse in dm².

tavola	di BOLOGNA	= dm².	1445
starello	.. CAGLIARI	= ...	398675
quadrato	.. FIRENZE	= ...	340619
cannella	.. GENOVA	= ...	886
tavola	.. MILANO	= ...	2727
moggio	.. NAPOLI	= ...	69987
salma	.. PALERMO	= ...	1746258
rubbio	.. ROMA	= ...	1848438
tavola	.. TORINO	= ...	3810
campo	.. VENEZIA	= ...	365660

Esercizi

Calcolare (in m². ed in dm². residui):

1. — la ***giornata torinese***, di 100 *tavole*.

2. — la ***pertica milanese***, di 24 *tavole*.

3. — la ***tornatura bolognese***, di 144 *tavole*.

4. — la ***tavola fiorentina***, sapendo che un *quadrato* era 10 *tavole*.

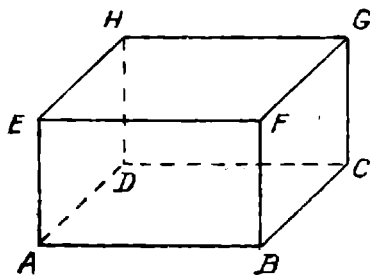
5. — la ***bisaccia palermitana***, sapendo che una *salma* era 4 *bisaccie*.

§ 3. — Volumi di parallelepipedi rettangoli

1. — Allorchè, in una medesima questione, ci dobbiamo occupare di *lunghezze* e di *volumi*, sarà *sottinteso* che l'***unità solida è il cubo dell' unità lineare***.

Ad es., se l'*unità lineare* è il cm., sarà *sottinteso* che l' *unità solida* è il cm³.

2. — I ***corpi***, di cui più sovente occorre calcolare il ***volume***, sono i ***parallelepipedi rettangoli***.

Tali sono, ad es., i mattoni pieni, i libri chiusi, le scatole e le casse abituali, ecc.

3. — La figura rappresenta *prospetticamente* un *parallelepipedo rettangolo*, come se esso fosse di vetro e quindi trasparente.

4. — Esso ha *sei faccie*, ciascuna delle quali è un *rettangolo*.

Due facce, non aventi alcun vertice comune, si dicono fra loro opposte.

Esse sono fra loro *parallele* ed *eguali*.

Sono fra loro *opposte* le facce $ABCD$ ed $EFGH$, e così pure $ADHE$ e $BCGF$, nonchè $ABFE$ e $DCGH$.

5. — Esso ha *dodici spigoli*, a quattro a quattro fra loro *paralleli* ed *eguali*.

Tali sono AB, DC, HG, EF, e così pure AD, BC, FG, EH, nonchè AE, BF, CG, DH.

Due spigoli, che siano comuni a due facce opposte, si dicono fra loro opposti.

Ad es., sono fra loro *opposti* gli spigoli AB ed HG.

Qual è lo spigolo opposto a BC? a CD? a DA? ad AE? a BF?

6. — Esso ha *otto vertici*.

Ciascuno di essi è *comune* a *tre facce* ed a *tre spigoli*.

Si dice suo **opposto** *il vertice che è comune alle facce opposte ed agli spigoli opposti.*

Sono *vertici opposti* A, G e così B, H ed anche C, E, nonchè D, F.

7. — Dal fatto che ogni sua faccia è un *rettangolo*, segue che:

i tre spigoli, uscenti da uno stesso vertice, sono a due a due perpendicolari fra loro.

Inoltre: *ciascuno di essi è perpendicolare alla faccia determinata dagli altri due*

e perciò viene chiamato: ***altezza corrispondente*** a quella faccia.

8. — Per quanto precede: le *misure* di *tre spigoli uscenti da uno stesso vertice* di un *parallelepipedo rettangolo*, sono *eguali* alle *misure* di *tre spigoli uscenti da un qualunque altro vertice.*

Esse si chiamano: le ***dimensioni*** del *parallelepipedo* ***rettangolo.***

9\. — Ho sul tavolo un libro.

In cm., le sue *dimensioni* sono 18, 12, 2.

Il che vuol dire che le *dimensioni* di ogni sua pagina sono 18 e 12, e che il suo *spessore* è 2.

Suppongo di avere tanti *cubetti*, di un cm. di *spigolo* (cioè: tanti cm^3), quanti mi occorrono per comporre un ***primo strato***, di 18 *righe* di 12 *cubetti*, e per sovrapporgli un ***secondo strato***, anch'esso di 18 *righe* di 12 *cubetti*.

Ciascuno *strato* essendo *alto* un cm., *i due strati sovrapposti* compongono un *parallelepipedo rettangolo*, avente le *dimensioni* del libro che ho sul tavolo.

Quanti *cubetti* lo compongono?

$$18 \times 12 \times 2 = 216 \times 2 = 432.$$

Concludo che *il volume* del mio libro è cm^3. 432.

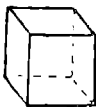
10. = Ed in generale, che:
il volume di un parallelepipedo rettangolo è il prodotto delle sue dimensioni.

11. — Osservando che 18×12 è *l'area* di *una faccia* (del *parallelepipedo* considerato) e che 2 è *la corrispondente altezza*, si può anche dire che:
il volume di un parallelepidedo rettangolo è il prodotto (dell'area) di una sua faccia per la corrispondente altezza.

12. — Come sapete, se *le tre dimensioni* di un *parallelepipedo rettangolo* sono fra loro *eguali*, allora lo si chiama ***cubo***; e si dice suo ***spigolo*** anche *la misura di un qualunque suo spigolo.*

13. — Perciò, il *volume* di un *cubo* è il prodotto di tre

fattori eguali al suo spigolo, cioè la terza potenza del suo spigolo.

Ad es., se lo *spigolo* di un *cubo* è mm. 9, allora il suo *volume* è mm^3.

$$9^3 = 81 \times 9 = 729.$$

Da ciò, l'uso di chiamare *cubo di un numero* la sua *terza potenza*.

14. — Brevemente:
il volume di un cubo è il cubo del suo spigolo.

DOMANDE

Sottintendendo, ad es., che l' unità lineare *è il cm. e quindi che* l' unità superficiale *è il* cm^2. *e* l' unità solida *è il* cm^3.:

1. — *qual è il volume di un mattone, le cui dimensioni sono 25, 12, 6?*

(*Giova decomporre 12 in 4 × 3*).

2. — *se il volume di un libro è 900 e se le dimensioni delle sue pagine sono 15 e 20, qual è il suo spessore?*

3. — *se il volume di una scatola è 4800 ed essa è alta 8, qual'è l'area del fondo?*

4. — *Che altezza bisogna dare ad una scatola, il cui fondo dev' essere un quadrato di lato 20, affinchè il volume sia 4800?*

5. — *Che volume ha un cubo di spigolo 7?*

(*A 49 giova sostituire 50 1*).

Problemi

1. — Si trovi l' area della superficie totale di un cubo ed il suo volume, sapendo che la somma degli spigoli è cm. 156.

(Quanti sono gli spigoli? qual è la lunghezza di ciascuno? Qual è l'area di ciascuna faccia? quante sono le facce? quale area ha la superficie totale del cubo? Qual è il suo volume?)

2. — Le dimensioni del fondo di una scatola sono cm. 18 e cm. 15. L'area della sua superficie laterale è cm^2. 792.

Calcolare il volume della scatola.

(Se si toglie il coperchio e si stacca il fondo, rimangono le facce laterali. Se si taglia lungo lo spigolo comune a due di esse, le quattro facce si possono stendere sul tavolo, ottenendo un rettangolo, alto quanto la scatola e lungo quanto il perimetro del fondo.

Perciò, prima si calcoli il perimetro del fondo, poi l'altezza della scatola e per ultimo il suo volume).

3. — Un fabbricante di giocattoli ha un parallelepipedo di legno, le cui dimensioni in mm. sono **165, 231, 385**.

Egli vorrebbe ricavarne cubetti tutti eguali e grandi il più possibile.

Quanti cubi otterrà?

(Di quanti mm. dev'essere lo spigolo di ogni cubo?

Quanti strati, di quante file, di quanti cubi?)

ANTICHE MISURE ITALIANE DI CAPACITÀ

Le antiche *misure di volume* sono ormai cadute in disuso.

Ecco, invece, le varie *unità principali* per le *misure di capacità*, tuttora in uso per i *liquidi*, espresse in cm³.

corba	di BOLOGNA	= cm³.	78·593
botte	.. CAGLIARI	= ...	44·840
barile	.. FIRENZE	= ...	45·584
barile	.. GENOVA	= ...	79·500
brenta	.. MILANO	= ...	75·554
barile	.. NAPOLI	= ...	43·625
quartara	.. PALERMO	= ...	17·193
barile	.. ROMA	= ...	58.341
brenta	.. TORINO	= ...	49·307
mastello	.. VENEZIA	= ...	75·117.

Esercizi

Calcolare (in dm³., cioè *litri*, e cm³. residui):

1. — la ***castellata bolognese***, di 10 *corbe*.

2. — la ***soma fiorentina***, di 2 *barili*.

3. — la ***botte napoletana***, di 12 *barili*.

4. — la ***botte palermitana***, di 32 *barili*, di 2 *quartare*.

5. — la ***botte romana***, di 8 ***some***, di 2 ***barili***.

6. — la ***botte veneziana***, di 10 ***mastelli***.

ANTICHE MISURE ITALIANE DI PESO

1. — Quasi dovunque, in Italia, l'***unità principale*** per le ***misure di peso*** si chiamava ***libbra***.

Era ***suddivisa*** in 12 ***oncie*** e corrispondeva a pesi diversi:

libbra di BOLOGNA	= mg.	361·851	
. . . . . . CAGLIARI	= . . .	406·563	
. . . . . . FIRENZE	= . . .	339·542	
. . . . . . GENOVA	= . . .	317·664	
. . . . . . MILANO	= . . .	326·793	
. . . . . . ROMA	= . . .	339·072	
. . . . . . TORINO	= . . .	368·880	
. . . . . . VENEZIA	= . . .	476·999	(libbra *grossa*)
. . . .	= . . .	301·230	(libbra *sottile*).

2. — Invece, a NAPOLI ed a PALERMO, l'***unità principale*** per le ***misure di peso*** si chiamava ***rotolo*** e corrispondeva a mg. 890·997 (a Napoli) ed a mg. 793·420 (a Palermo).

3. — Non m'indugio a far cenno delle antiche misure italiane di *valore*, perchè non si usano più affatto.

Esercizi

A quanti mg. corrispondeva:

1. — l'oncia di Genova?

2. — l'oncia di Roma?

3. — l'oncia di Torino?

RIASSUNTO

Capitolo I. — I numeri naturali

1. — La successione naturale dei numeri è infinita.

2. — Il numero degli oggetti di un gruppo finito è l'ultimo numero che si adopera per contarli. — Nel contarli, se ne forma una successione. — Nel ricontarli, può variare la loro successione, ma non il loro numero.

3. — Ogni gruppo finito di numeri ha minimo e massimo.

Capitolo II. — Il sistema metrico decimale

1. — Il metro legale è la lunghezza del metro campione (alla temperatura di 0°).

2. — Il metro quadrato è un quadrato, che ha i lati lunghi un metro.

3. — Il metro cubo è un cubo, che ha gli spigoli lunghi un metro.

4. — Il litro è la capacità di un decimetro cubo.

5. — Il grammo è il peso di un centimetro cubo di acqua distillata (alla temperatura di 4° ed alla latitudine di 45°).

Capitolo III. — Addizione

1. — La somma di due numeri naturali (il secondo de quali diverso da zero) è il numero cui si perviene, nella successione naturale, contando tanti successivi del primo addendo quanti ne indica il secondo.

2. — La somma di due numeri, uno dei quali sia zero, è eguale all'altro.

3. — La somma di due numeri, diversi da zero, è maggiore di ciascuno di essi.

4. — Si ottiene la somma di parecchi numeri, aggiungendo il terzo alla somma dei primi due, il quarto alla somma dei primi tre, e così via sino ad aver adoperato l'ultimo addendo.

5. — L'addizione è sempre eseguibile (cioè: la somma di due numeri naturali è un numero naturale).

6. — L'addizione è commutativa (cioè: una somma non cambia, cambiando l'ordine degli addendi).

7. — L'addizione è associativa (cioè: una somma, di almeno tre numeri, non cambia, cambiando il modo di associarli).

Capitolo IV. — Sottrazione

1. — La differenza di due numeri naturali (il secondo dei quali sia diverso da zero e non sia maggiore del primo) è il numero cui si perviene, nella successione na-

turale, contando tanti precedenti del primo numero quanti ne indica il secondo.

2. — Se il sottrattore è zero, la differenza è eguale al sottraendo.

3. — Se il sottrattore è eguale al sottraendo, la differenza è zero.

4. — La sottrazione è inversa dell'addizione (cioè: se dalla somma di due numeri si toglie il secondo, si ritrova il primo).

5. — L'addizione è inversa della sottrazione (cioè: se alla differenza di due numeri si aggiunge il secondo, si ritrova il primo).

6. — Se si toglie un numero ad un addendo e lo si aggiunge ad un altro addendo, la somma non cambia.

7. — Aggiungendo o togliendo uno stesso numero al sottraendo e al sottrattore, la differenza non cambia.

8. — Se ad un primo numero si deve successivamente aggiungerne un secondo e toglierne un terzo, è lecito di invertire l'ordine delle due operazioni (purchè il terzo numero non sia maggiore del primo).

9. — Per sottrarre un numero da una somma, basta toglierlo da un addendo. E per sottrarre un addendo da una somma, basta sopprimerlo.

10. — È indifferente che da un numero si sottraggano successivamente parecchi numeri, ovvero che da esso si sottragga la loro somma.

11. — Una somma di differenze è eguale alla differenza tra la somma dei sottraendi e la somma dei sottrattori.

Capitolo V. — Moltiplicazione

1. — Il prodotto di due numeri naturali (il secondo dei quali non minore di 2) è la somma di tanti addendi eguali al primo, quanti ne indica il secondo.

2. — Il prodotto di due numeri, uno dei quali sia 1, è eguale all'altro.

3. — Il prodotto di due numeri, uno dei quali sia zero, è zero.

4. — Il prodotto di due numeri, entrambi diversi da zero, è diverso da zero.

5. — Si ottiene il prodotto di parecchi numeri, moltiplicando il prodotto dei primi due per il terzo, il numero ottenuto per il quarto, e così via sino ad aver adoperato l'ultimo fattore.

6. — La moltiplicazione è sempre eseguibile (cioè: il prodotto di due numeri naturali è un numero naturale).

7. — La moltiplicazione è commutativa (cioè: un prodotto non cambia, cambiando l'ordine dei fattori).

8. — La moltiplicazione è associativa (cioè: un prodotto, di almeno tre numeri, non cambia, cambiando il modo di associarli).

9. — La moltiplicazione è distribuitiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione (cioè: si può moltiplicare una somma o una differenza per un numero, moltiplicando per questo numero ogni termine di quella somma o di quella differenza).

10. — Se tutti i termini di una somma o di una differenza sono prodotti, aventi un fattore comune, questo si può raccogliere (o mettere in evidenza).

Capitolo VI. — **Divisione**

1. — Il quoziente di due numeri naturali è il numero delle volte che il secondo può venir sottratto successivamente dal primo. Il resto dei due numeri è l'ultima di queste differenze, e quindi è minore del divisore.

2. — In ogni divisione, il divisore dev'essere diverso da zero.

3. — Se al prodotto del divisore per il quoziente si aggiunge il resto, si ritrova il dividendo.

4. — In altro modo: — Il quoziente di due numeri naturali è il massimo numero naturale per il quale si possa moltiplicare il divisore, ottenendo un prodotto che non sia maggiore del dividendo. Il resto è la differenza tra il dividendo e questo prodotto.

5. — Allorchè il dividendo è minore del divisore, il quoziente è zero ed il resto è eguale al dividendo.

6. — Allorchè il resto di due numeri naturali è zero, la divisione si dice esatta, il dividendo si dice divisibile per il divisore ed il quoziente si chiama anche quoto.

7. — Lo zero è divisibile per ogni numero diverso da zero (ed il quoto è zero).

8. — Ogni numero diverso da zero è divisibile per 1 (ed il quoto è eguale al dividendo) e per sè stesso (ed il quoto è 1).

9. — La divisione esatta è inversa della moltiplicazione (cioè: se il prodotto di due numeri si divide per il secondo, si ritrova il primo).

10. — La moltiplicazione è inversa della divisione esatta (cioè: se il quoto di due numeri si moltiplica per il secondo, si ritrova il primo).

11. — Un quoto non cambia se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero.

12. — Se un primo numero viene successivamente moltiplicato per un secondo e diviso esattamente per un terzo, è lecito di invertire l'ordine delle due operazioni (purchè il primo numero sia divisibile per il terzo).

13. — Per dividere un prodotto per un numero, basta dividere per esso uno dei fattori. E per dividere un prodotto per un suo fattore, basta sopprimere questo.

14. — È indifferente che un numero si divida successivamente per parecchi numeri, ovvero che lo si divida per il loro prodotto.

15. — Un prodotto di quoti è eguale al quoto del prodotto dei dividendi e del prodotto dei divisori.

16. — La divisione esatta è distributiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione (cioè: si può dividere una somma o una differenza per un numero, dividendo per questo numero ogni termine di quella somma o di quella differenza).

17. — Se tutti i termini di una somma o di una differenza sono quoti, aventi uno stesso divisore, questo si può raccogliere (o mettere in evidenza).

Capitolo VII. — Applicazioni

1. — La media aritmetica di alcuni numeri è il quoto della loro somma per il loro numero (supponendo, per ora, che la loro somma sia divisibile per il loro numero).

2. — La somma di quanti si vogliano numeri naturali consecutivi è la metà del prodotto della somma degli estremi per il numero degli addendi. In particolare:

3. — La somma di quanti si vogliano numeri naturali consecutivi, a cominciare da 1, è la metà del prodotto dell'ultimo numero per il suo successivo.

4. — Il nostro calendario è quello gregoriano.

Sono anni bisestili (di 366 giorni) gli anni secolari (come fu il 1600 e sarà il 2000) le cui prime due cifre compongono un numero divisibile per 4; e tutti gli altri anni divisibili per 4 (come furono il 1896, il 1904, ecc.).

Tutti gli altri anni (come furono il 1899, il 1900, il 1901, ecc.) sono comuni (di 365 giorni).

Capitolo VIII. — Elevazione a potenza

1. — Il quadrato di un numero è il prodotto del numero per sè stesso.

2. — Addizionando successivamente i numeri dispari, a cominciare da 1, si ottiene la successione dei quadrati dei numeri naturali.

3. — Il quadrato della somma di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati, aumentata del loro doppio prodotto.

4. — Il quadrato della differenza di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati, diminuita del loro doppio prodotto.

5. — La differenza dei quadrati di due numeri è eguale al prodotto della somma delle basi per la loro differenza. Inversamente:

6. — Il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è eguale alla differenza dei loro quadrati.

7. — Una potenza di un numero (con esponente natu-

rale non minore di 2) è il prodotto di tanti fattori eguali alla base, quanti ne indica l'esponente.

8. — In particolare: — Il cubo di un numero è il prodotto del quadrato di quel numero per il numero stesso.

9. — Ogni potenza di zero vale zero.

10. — Ogni potenza di 1 vale 1.

11. — Ogni potenza con esponente 1 è eguale alla base.

12. — Ogni potenza con esponente 0 (e base diversa da 0) vale 1.

13. — Il prodotto od il quoto di potenze, con una stessa base, è eguale a quella potenza, con la stessa base, che ha per esponente la somma o la differenza degli esponenti. (Nel caso della divisione, l'esponente del dividendo dev'essere non minore di quello del divisore).

14. — Il prodotto od il quoto di potenze, con uno stesso esponente, è eguale a quella potenza, con lo stesso esponente, che ha per base il prodotto od il quoto delle basi.

15. — Ogni potenza di potenza è eguale a quella potenza, con la base primitiva, che ha per esponente il prodotto degli esponenti.

Capitolo IX. — Divisibilità

1. — Ogni numero naturale si dice pari o dispari, secondochè esso è o non è divisibile per 2.

2. — Sono divisibili per 2 o per 5 i numeri, in cui l'ultima cifra è un numero divisibile per 2 o per 5.

3. — Sono divisibili per 4 o per 25 i numeri, in cui le ultime due cifre formano un numero divisibile per 4 o per 25.

4. — Sono divisibili per 8 o per 125 i numeri, in cui le ultime tre cifre formano un numero divisibile per 8 o per 125.

5. — Sono divisibili per 3 o per 9 i numeri in cui la somma delle cifre è divisibile per 3 o per 9.

6. — Sono divisibili per 11 i numeri, in cui è divisibile per 11 la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari (se le due somme sono diverse, dalla maggiore si tolga la minore).

7. — Un numero qualunque e la somma delle sue cifre, separatamente divisi per 9, danno resti eguali.

8. — La prova del 9 per l'addizione si fa, osservando se risultano fra loro eguali i resti per 9, tanto della somma calcolata, quanto della somma dei resti per 9 degli addendi.

9. — La prova del 9 per la sottrazione si fa, sottoponendo alla prova del 9 l'addizione che si dovrebbe eseguire, come prova ordinaria della sottrazione.

10. — La prova del 9 per la moltiplicazione si fa, osservando se risultano fra loro eguali i resti per 9 tanto del prodotto calcolato quanto del prodotto dei resti per 9 dei fattori.

11. — La prova del 9 per la divisione si fa, sottoponendo alla prova del 9 la moltiplicazione e l'addizione che si dovrebbero eseguire, come prova ordinaria della divisione.

12. — Si dice primo ogni numero naturale, maggiore di 1, che sia divisibile soltanto per 1 e per sè stesso.

13. — La successione dei numeri primi è infinita.

14. — Ogni numero primo, diverso da 2 e da 5, termina con una delle cifre 1, 3, 7, 9.

15. — Si dice composto ogni numero naturale, maggiore di 1, che non sia primo.

16. — Un numero composto è divisore di un altro, allorchè ogni suo fattore primo è fattore dell' altro e con esponente non maggiore.

17. — Il numero dei divisori di un numero composto è il prodotto degli esponenti, aumentati di 1, dei suoi fattori primi. (Se si tratta di una potenza di un numero primo, il numero de' suoi divisori è il suo esponente aumentato di 1).

18. — Due numeri naturali si dicono primi fra loro, allorchè non hanno alcun divisore comune, diverso da 1.

19. — Due numeri primi, diversi, sono primi fra loro.

20. — Ogni numero primo è primo con ogni numero che non sia divisibile per esso.

21. — Due numeri composti sono primi fra loro, quando i fattori primi dell'uno sono tutti diversi dai fattori primi dell'altro.

22. — Un numero, che sia divisibile per due numeri primi fra loro, è divisibile per il loro prodotto.

Capitolo X. — Massimo divisore e minimo multiplo

1. — Il massimo divisore comune di quanti si vogliano numeri è il prodotto dei loro fattori primi comuni, ciascuno col minimo esponente (metodo dei fattori primi).

2. — Assoggettare due numeri al procedimento delle divisioni successive significa dividere il maggiore per il minore, questo per il resto, questo per il nuovo resto, e così via sino a che si giunga ad una divisione esatta.

3. — Il massimo divisore comune di due numeri è l' ultimo divisore cui si perviene, assoggettando i due numeri al procedimento delle divisioni successive.

4. — Se un numero è divisibile per un altro, quest' altro è il loro massimo divisore comune.

5. — Si ottiene il massimo divisore comune di parecchi numeri, calcolando quello del primo e del secondo, del numero trovato e del terzo, e così via sino ad aver adoperato tutti i numeri dati, in qualunque ordine (metodo delle divisioni successive).

6. — I divisori comuni di quanti si vogliano numeri sono i divisori del loro massimo divisore comune.

7. — Allorchè ciascuno di due numeri viene diviso per il loro massimo divisore comune, i due quoti risultano primi fra loro. Inversamente:

8. — Se, col dividere separatamente due numeri per un loro divisore comune, si ottengono due quoti primi fra loro, allora il divisore adoperato è il massimo divisore comune di quei due numeri.

9. — Due numeri sono primi fra loro, quando il loro massimo divisore comune è 1. In particolare: — Due numeri naturali consecutivi sono sempre primi fra loro. — Anche due numeri dispari consecutivi sono sempre primi fra loro.

10. — Il minimo multiplo comune di quanti si vogliano numeri è il prodotto dei loro fattori primi: i non comuni col loro esponente ed i comuni col massimo esponente (metodo dei fattori primi).

11. — I multipli comuni di quanti si vogliano numeri sono i multipli del loro minimo multiplo.

12. — Se un numero è divisibile per un altro, esso è il loro minimo multiplo.

13. — Il prodotto di due numeri naturali è sempre eguale al prodotto del loro massimo divisore per il loro minimo multiplo.

14. — Per calcolare il minimo multiplo di due numeri, basta dividere uno di essi (ad es., il minore) per il loro massimo divisore e poi moltiplicare il quoto per l'altro numero.

15. — Il minimo multiplo di due numeri, primi fra loro, è il loro prodotto. — Altrimenti, esso è minore (anzi, un fattore) del loro prodotto.

16. — Si ottiene il minimo multiplo comune di parecchi numeri, calcolando quello del primo e del secondo, del numero trovato e del terzo, e così via sino ad aver adoperato tutti i numeri dati, in qualunque ordine (metodo del massimo divisore).

Capitolo XI. — Applicazioni geometriche

1. — L'unità superficiale è il quadrato dell' unità lineare.

2. — L' area di un rettangolo è il prodotto delle sue dimensioni (cioè delle misure di due suoi lati consecutivi).

3. — L' area di un quadrato è il quadrato (seconda potenza) del suo lato.

4. — L' area di un triangolo è la metà del prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza. In particolare:

5. — L' area di un triangolo rettangolo è la metà del prodotto dei suoi cateti.

6. — L' area di un parallelogramma è il prodotto di un suo lato per la corrispondente altezza.

7. — L' area di un rombo è anche la metà del prodotto delle sue diagonali.

8. — L'area di un trapezio è la metà del prodotto della somma delle basi per l'altezza.

9. — L'area di un quadrangolo (convesso o concavo) è la metà del prodotto di una sua diagonale interna per la somma delle altezze ad essa corrispondenti (nei due triangoli in cui essa scinde il quadrangolo).

10. — L'unità solida è il cubo dell'unità lineare.

11. — Il volume di un parallelopipedo rettangolo è il prodotto delle sue dimensioni (cioè: delle misure di tre suoi spigoli consecutivi). Od anche: è il prodotto (dell'area) di una faccia per la corrispondente altezza.

12. — Il volume di un cubo è il cubo (terza potenza) del suo spigolo.

FINE DEL VOLUME PRIMO

INDICE

RIASSUNTO